

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*

ВЫПУСК
12

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТН СССР
1937

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК ДВЕНАДЦАТЫЙ

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
КОЛЛЕДЖА НМУ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1937 ЛЕНИНГРАД

135-72

АДРЕС РЕДАКЦИИ

Москва, Центр, Третьяковский проезд 1, Главная редакция технико-теоретической литературы, редакция сборников „Математическое просвещение“.

Сборник содержит оригинальные статьи по элементарной математике и простейшим вопросам высшей, отдаленные задачи, текущей жизни и библиографии.

Сборники рассчитаны на весьма широкий круг читателей: наиболее сильные учащиеся средней школы, студенты техникумов, вузов и втузов, преподаватели школ, техникумов и частично вузов (особенно педвузов) найдут в них интересный материал для чтения.

Сборники „Математическое просвещение“ продаются во всех книжных магазинах ОНТИ. Их можно получать также наложенным платежом, направив заказ по адресу: Москва, ул. Кирова 6, книжный магазин ОНТИ № 1, „Книга почтой“.

Корректурa А. Н. Крутова.

Редакция Р. Н. Бончковского.

Оформление Е. Г. Шляк.

Сдано в производство 13/VII 1937 г.
Печ. лист. 4. Уч.-авт. лист. 5,2.
Бум. листов 2.
Колич. печ. знаков в 1 бум. л. 10 000.

Подписано к печати 13/IX 1937 г.
Тираж 5.000. Формат 62/94 1/16.
Заказ. 2315. Главн. ред. технико-теор. лит. № 52.
Уполн. Главлита № Б—19439.

ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

М. Л. Шевелев (Казань)

В 9-м выпуске сборников „Математическое просвещение“ помещена работа А. Ф. Арёфьева: „Деление многочлена на многочлен“. Автор работы распространяет правило Горнера на многочлены и вводит прием подвижного делителя. Однако вместо этого приема можно ввести значительно более простую схему для деления многочлена на многочлен.

Пусть, например, нужно разделить многочлен

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-m}x^m + A_{n-m+1}x^{m-1} + \dots + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n$$

на многочлен

$$x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \dots + B_{m-1}x + B_m$$

и пусть в результате деления получается частное

$$C_0x^{n-m} + C_1x^{n-m-1} + C_2x^{n-m-2} + \dots + C_{n-m-1}x + C_{n-m}$$

И ОСТАТОК

$$D_1x^{m-1} + D_2x^{m-2} + \dots + D_{m-1}x + D_m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-m}x^m + A_{n-m+1}x^{m-1} + \dots + \\ & + A_{n-2}x^2 + A_{n-1}x + A_n = (x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \dots + \\ & + B_{m-1}x + B_m) \cdot (C_0x^{n-m} + C_1x^{n-m-1} + C_2x^{n-m-2} + \dots + \\ & + C_{n-m-1}x + C_{n-m}) + D_1x^{m-1} + D_2x^{m-2} + D_3x^{m-3} + \dots + \\ & + D_{m-1}x + D_m. \end{aligned}$$

Из полученного тождества имеем ряд следующих равенств

$$\begin{aligned} A_0 &= C_0, \\ A_1 &= C_1 + C_0 B_1, \\ A_2 &= C_2 + C_1 B_1 + C_0 B_2, \\ &\vdots \\ A_{n-m} &= C_{n-m} + C_{n-m-1} B_1 + C_{n-m-2} B_2 + \dots + C_0 B_{n-m}, \end{aligned}$$

$$A_{n-m+1} = D_1 + C_{n-m}B_1 + C_{n-m-1}B_2 + \dots + C_0B_{n-m+1},$$

.....

$$A_{n-2} = D_{m-2} + C_{n-m}B_{m-2} + C_{n-m-1}B_{m-1} + C_{n-m-2}B_m,$$

$$A_{n-1} = D_{m-1} + C_{n-m}B_{m-1} + C_{n-m-1}B_m,$$

$$A_n = D_m + C_{n-m}B_m.$$

Заметим, что в этих равенствах всякое $B_i = 0$ если $i > m$. Из этих равенств имеем следующие выражения для вычисления коэффициентов частного и остатка

$$C_0 = A_0,$$

$$C_1 = A_1 - C_0B_1,$$

$$C_2 = A_2 - C_1B_1 - C_0B_2,$$

.....

$$C_{n-m} = A_{n-m} - C_{n-m-1}B_1 - C_{n-m-2}B_2 - \dots - C_0B_{n-m},$$

$$D_1 = A_{n-m+1} - C_{n-m}B_1 - C_{n-m-1}B_2 - \dots - C_0B_{n-m},$$

$$D_2 = A_{n-m+2} - C_{n-m}B_2 - C_{n-m-1}B_3 - \dots - C_0B_{n-m+2},$$

.....

$$D_{m-2} = A_{n-2} - C_{n-m}B_{m-2} - C_{n-m-1}B_{m-1} - C_{n-m-2}B_m,$$

$$D_{m-1} = A_{n-1} - C_{n-m}B_{m-1} - C_{n-m-1}B_m,$$

$$D_m = A_n - C_{n-m}B_m.$$

Из рассмотрения этих формул видна следующая простая схема для получения коэффициентов частного и остатка, представляющая обобщение правила Горнера.

Выписываем в верхнем горизонтальном ряду все коэффициенты делимого; над ними коэффициенты делителя, начиная с B_1 , взятые с обратными знаками. Первый член частного $C_0 = A_0$ выписываем слева и его умножаем на коэффициенты делителя, написанные в самом верхнем ряду. Сложив по диагонали $A_1 + (-C_0B_1)$, получим второй коэффициент частного C_1 . Далее процесс повторяется: C_1 умножаем на коэффициенты делителя, написанные сверху, и для получения C_2 производим опять сложение по диагонали $A_2 + (-C_1B_1) + (-C_0B_2)$. Таким образом, процесс нахождения коэффициентов частного (и первого коэффициента остатка D_1) сводится к двум операциям: умножению по горизонтали и сложению по диагоналям. Умножение по горизонтали следует также сделать с последним коэффициентом частного C_{n-m} . Что же касается нахождения коэффициентов остатка, то вопрос сводится только к сложению по диагоналям, причем коэффициенты остатка будут получаться в самой нижней горизонтальной строке.

Следовательно, имеем такую схему:

	$-B_1$	$-B_2$	$-B_3$	
	A_0	A_1	A_2	
C_0	$-C_0B_1$	$-C_0B_2$	$-C_0B_3$	
C_1	$-C_1B_1$	$-C_1B_2$	$-C_1B_3$	
C_2	$-C_2B_1$	$-C_2B_2$	$-C_2B_3$	
C_{n-m-1}	$-C_{n-m-1}B_1$	$-C_{n-m-1}B_2$	$-C_{n-m-1}B_3$	
C_{n-m}	$-C_{n-m}B_1$	$-C_{n-m}B_2$	$-C_{n-m}B_3$	
D_1	D_2	D_3	D_4	

Пример. $(5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25) : (x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 7x^3)$.

	3	— 2	7								
	5	— 4	3	— 2	— 3	7	— 4	— 3	2	— 10	25
5	15	— 10	35								
11	33	— 22	77								
26	78	— 52	182								
89	267	— 178	623								
289	867	— 578	2023								
878	41	2020	2	— 10	25						

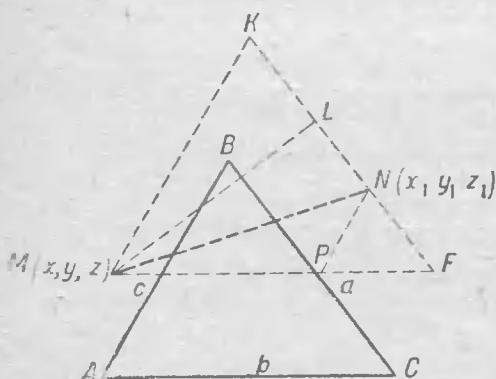
следовательно, частное: $5x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 89x + 289$,
остаток: $878x^5 + 41x^4 + 2020x^3 + 2x^2 - 10x + 25$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РАССТОЯНИЙ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Т. А. Делибаш (Баку)

Мы займемся выводом формулы, которая позволит находить расстояния между известными точками треугольника, например, — расстояние между центрами вписанной и описанной около данного треугольника окружностей (формула Эйлера), расстояние между центрами внеписанных окружностей, и т. д.

Назовем треугольник ABC основным или базисным треугольником и его стороны обозначим через a , b и c (фиг. 1). Условимся считать расстояние точки от стороны основ-



Фиг. 1.

ного треугольника положительным, если направление перпендикуляра из точки на сторону совпадает с направлением высоты, опущенной на эту же сторону. Если дана точка M с координатами x, y, z , где x, y и z — направленные расстояния этой точки от сторон a, b и c базисного треугольника, то, как легко видеть, имеем следующее тождество:

$$ax + by + cz = 2S,$$

где S — площадь базисного треугольника¹⁾. Для другой точки $N(x_1, y_1, z_1)$ имеем:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 2S,$$

и, следовательно,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \quad (1)$$

Проведем прямые MK и NP , KF , MF соответственно параллельно сторонам AB , BC , AC . Как видно из чертежа, треугольники MKF и ABC подобны, а потому, если $ML \perp KF$, то имеем:

$$\frac{KF}{ML} = \frac{BC}{h_a} = \frac{a}{h_a}; \quad \frac{MF}{ML} = \frac{b}{h_a}; \quad \frac{MK}{ML} = \frac{c}{h_a}. \quad (2)$$

Но $ML = x - x_1$ и $h_a = \frac{2S}{a}$; следовательно, равенства (2) примут вид:

$$KF = \frac{a^2(x - x_1)}{2S}; \quad MF = \frac{ab(x - x_1)}{2S}; \quad MK = \frac{ac(x - x_1)}{2S}. \quad (3)$$

С другой стороны, $\triangle PNF \sim \triangle ABC$, и потому получим:

$$NF = \frac{ab(y_1 - y)}{2S}. \quad (3')$$

¹⁾ Координаты x, y, z точки M являются частным случаем так называемых трилинейных координат. (Прим ред.)

Из чертежа видно, что

$$KN = KF - NF = \frac{a}{2S} \cdot [a(x - x_1) + b(y - y_1)] = \frac{ac(z_1 - z)}{2S}. \quad (3'')$$

Применяя теорему Стюарта¹⁾ к треугольнику MKF , мы получим

$$MN^2 \cdot KF = MK^2 \cdot NF + MF^2 \cdot KN - KN \cdot NF \cdot KF,$$

или, подставляя значения KF , MF , MK , NF и KN из (3), (3') и (3''), мы напомним (обозначая MN через δ):

$$\delta^2 \cdot \frac{a^2(x - x_1)}{2S} = \frac{a^2c^2(x - x_1)^2}{4S^2} \cdot \frac{ab(y_1 - y)}{2S} + \frac{a^2b^2(x - x_1)^2}{4S^2} \cdot \frac{ac(z_1 - z)}{2S} - \\ - \frac{a^2(x - x_1)}{2S} \cdot \frac{ab(y_1 - y)}{2S} \cdot \frac{ac(z_1 - z)}{2S}.$$

Отсюда

$$\delta^2 = \frac{abc}{4S^2} \cdot [c(x - x_1)(y_1 - y) + b(x - x_1)(z_1 - z) - a(y_1 - y)(z_1 - z)],$$

или

$$\delta^2 = -\frac{R}{S} \cdot [a(y - y_1)(z - z_1) + b(z - z_1)(x - x_1) + \\ + c(x - x_1)(y - y_1)]. \quad (4)$$

Это и есть искомая формула, выражающая расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $N(x_1, y_1, z_1)$.

Рассмотрим частные случаи формулы (4). Пусть точка N есть центр вписанной в треугольник ABC окружности; тогда $x_1 = y_1 = z_1 = \frac{S}{p} = r$, и, подставляя эти значения в формулу (4), мы получим:

$$\delta^2 = -\frac{R}{S} \cdot \left[a\left(y - \frac{S}{p}\right)\left(z - \frac{S}{p}\right) + b\left(z - \frac{S}{p}\right)\left(x - \frac{S}{p}\right) + \right. \\ \left. + c\left(x - \frac{S}{p}\right)\left(y - \frac{S}{p}\right) \right] = -\frac{R}{Sp^2} \cdot \{ S^2(a+b+c) - Sp[c(x+y) + \\ + b(z+x) + a(y+z)] + p^2(ayz + bzx + cxy) \} = \\ = -\frac{R}{S} \{ 2pr^2 - r[(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z] + ayz + bzx + cxy \}.$$

Но

$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 2p(x+y+z) - (ax+by+cz) = \\ = 2p(x+y+z) - 2S,$$

и далее

$$2pr^2 - r[(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z] = 2Sr - 2S(x+y+z) + 2Sr = \\ = -2S(x+y+z-2r),$$

и, следовательно,

$$\delta^2 = -\frac{R}{S} \cdot [-2S(x+y+z-2r) + ayz + bzx + cxy] = \\ = 2R(x+y+z-2r) - \frac{R}{S}(ayz + bzx + cxy).$$

¹⁾ См. Шаль, Высшая геометрия, 1910, стр. 202 и сл.

Таким образом, расстояние от центра вписанного в треугольник ABC круга до любой точки $M(x, y, z)$ выражается формулой

$$\delta_r^2 = 2R(x + y + z - 2r) - \frac{R}{S}(ayz + bzx + cxy). \quad (5)$$

Если, в частности, M есть центр описанной около треугольника ABC окружности, то

$$x = R \cos A, \quad y = R \cos B, \quad z = R \cos C,$$

и, следовательно:

$$x + y + z - 2r = R(\cos A + \cos B + \cos C) - 2r.$$

Но

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R},$$

поэтому

$$x + y + z - 2r = R - r.$$

С другой стороны, имеем:

$$\begin{aligned} ayz + bzx + cxy &= 2R^3(\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B) = \\ &= 2R^3(\sin C \cos C + \sin C \cos A \cos B) = \\ &= 2R^3 \sin A \sin B \sin C = RS, \end{aligned}$$

и поэтому расстояние от центра вписанной окружности до центра описанной выразится формулой

$$\delta_{r, R}^2 = 2R(R - r) - \frac{R}{S}RS = R^2 - 2Rr = R(R - 2r).$$

Это — известная формула Эйлера.

Пусть M есть центр внеписанного круга, который касается стороны a . Тогда $x = -e_a$, $y = z = e_a$ и, следовательно,

$$\delta_{r, p}^2 = 2R(e_a - 2r) + \frac{R}{S}e_a^2 \cdot 2(p - a) = 2Re_a - 4Rr + 2Re_a,$$

т. е.

$$\delta_{r, p}^2 = 4R(e_a - r).$$

Для дальнейшего упрощения вспомним, что

$$e_a = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \quad \text{и} \quad r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

поэтому

$$\delta_{r, p}^2 = \frac{2a}{\sin A} \cdot \frac{a \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = a^2 \sec^2 \frac{A}{2},$$

т. е.

$$\delta_{r, p} = a \sec \frac{A}{2}.$$

(4) Положим теперь, что N есть центр описанного круга. Тогда по формуле имеем:

$$\begin{aligned} \delta_R^2 &= -\frac{R}{S} \cdot [a(y - R \cos B)(z - R \cos C) + b(z - R \cos C)(x - R \cos A) + \\ &+ c(x - R \cos A)(y - R \cos B)] = -\frac{R}{S}(ayz + bzx + cxy) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{R^2}{S} \cdot [(b \cos C + c \cos B)x + (c \cos A + a \cos C)y + \\ + (a \cos B + b \cos A)z] - \frac{R}{S} RS = \frac{R^2}{S} (ax + by + cz - S) - \\ - \frac{R}{S} (ayz + bzx + cxy).$$

Итак:

$$\delta_R^2 = R^2 - \frac{R}{S} (ayz + bzx + cxy). \quad (6)$$

Если точка $M(x, y, z)$ есть центр тяжести треугольника, то

$$x = \frac{h_a}{3} = \frac{2S}{3a}, \quad y = \frac{2S}{3b}, \quad z = \frac{2S}{3c},$$

и тогда:

$$\delta_{R,0}^2 = R^2 - \frac{R}{S} \cdot \frac{4S^2}{9abc} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}. \quad (7)$$

Если M есть центр вневписанного круга, который касается стороны a , то

$$\delta_{R,p}^2 = R^2 + \frac{R}{S} \cdot e_a^2 \cdot 2(p-a) = R(R + 2e_a).$$

Если M есть точка Лемуана (точка пересечения симедиан), то¹⁾

$$x = \frac{a^2 h_a}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{b^2 h_b}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad z = \frac{c^2 h_c}{a^2 + b^2 + c^2},$$

и далее

$$\delta_{R,2}^2 = R^2 - \frac{R}{S} \cdot \frac{3 \cdot 4S^2 \cdot abc}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

или

$$\delta_{R,2}^2 = R^2 - 3 \left(\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2.$$

Вообще, если M есть точка пересечения „прямых n “, то, как известно¹⁾:

$$x = \frac{2Sa^{n-1}}{a^n + b^n + c^n}, \quad y = \frac{2Sb^{n-1}}{a^n + b^n + c^n}, \quad z = \frac{2Sc^{n-1}}{a^n + b^n + c^n},$$

и расстояние от центра описанного круга до точки пересечения „прямых n “ будет равно

$$\delta_{R,(n)}^2 = R^2 - \left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n} \right)^2 \cdot [(ab)^{n-2} + (bc)^{n-2} + (ca)^{n-2}]. \quad (8)$$

Отсюда сразу при $n=0$ получим формулу (7), при $n=1$ получим формулу Эйлера. Если M есть точка пересечения антибиссектрис, то $n=-1$ и формула (8) дает:

$$\delta_{R,(-1)}^2 = R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(ab + bc + ca)^2}.$$

¹⁾ См. статью С. И. Зетеля в „М. П.“ № 1, 1934.

ОБ ОДНОМ ПОСТРОЕНИИ ПРАВИЛЬНОГО ИКОСАЭДРА И ПРАВИЛЬНОГО ДОДЕКАЭДРА

Д. И. Перепелкин (Москва)

1. В связи с опубликованной в одном из предыдущих выпусков сборника статей, посвященной построению правильных икосаэдра и додекаэдра ¹⁾, мне хотелось бы описать в настоящей заметке один способ построения этих многогранников, который хотя и не является новым ²⁾, но не пользуется, как мне кажется, достаточной известностью ³⁾.

Построение, о котором идет речь, позволяет сравнительно просто вывести основные метрические соотношения в правильных икосаэдре и додекаэдре, вовсе не прибегая к тригонометрии и основываясь исключительно на делении отрезка в среднем и крайнем отношении ⁴⁾.

Напомним, что точка C , лежащая на отрезке AB , делит этот отрезок по определению в среднем и крайнем отношении, если выполнено равенство

$$AB : AC = AC : CB,$$

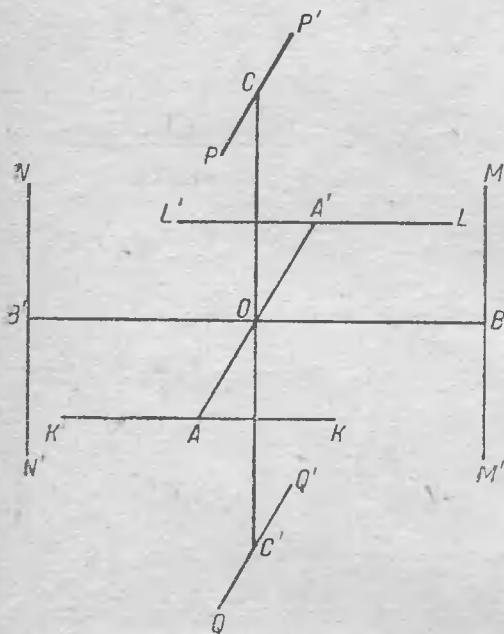
при этом большая часть AC отрезка AB и его меньшая часть CB выражаются через отрезок AB следующим образом:

$$AC = \frac{1}{2} AB \cdot (\sqrt{5} - 1),$$

$$CB = \frac{1}{2} AB \cdot (3 - \sqrt{5}).$$

2. Для построения правильного икосаэдра строим три равных попарно перпендикулярных отрезка AA' , BB' , CC' , середины которых лежат в одной точке O (фиг. 1). Через концы первого отрезка AA' проводим

прямые KK' и LL' , параллельные второму отрезку BB' , и откладываем на них отрезки $AK = AK' = A'L = A'L'$, каждый из которых равен большей части отрезка OA , разделенного в сред-



Фиг. 1.

¹⁾ А. Д. В а н ю ш и н, Построения икосаэдра и додекаэдра, „Математическое просвещение“, вып. 5, стр. 3—11, 1936.

²⁾ См., например, М. Brückner, Vielecke und Vielfläche, 1900.

³⁾ Приводимое далее построение правильного икосаэдра мне в литературе на русском языке встречать не приходилось; что касается додекаэдра, то соответствующее построение описано (в форме, отличной от принятой в настоящей статье) в книге Р. В. Гангнус и Ю. О. Гурвиц, Геометрия, ч. II, М., 1935, стр. 189.

⁴⁾ Тригонометрический вывод соотношений в правильных икосаэдре и додекаэдре можно найти, например, в статье А. С. Кованько, О правильных многогранниках, сборник „Элементарная математика в средней школе“, вып. 2, 1936, стр. 71—87.

нем и крайнем отношении. Точно так же через концы второго отрезка BB' проводим прямые MM' и NN' , параллельные третьему отрезку CC' , и откладываем на них отрезки $BM = BM' = B'N = B'N'$, каждый из которых равен отрезку AK . Наконец, через концы третьего отрезка CC' проводим прямые PP' и QQ' , параллельные первому отрезку AA' , и откладываем на них отрезки $CP = CP' = C'Q = C'Q'$, каждый из которых также равен AK . Соединяя точку K с точками M, M', P и Q , точку K' — с точками N, N', P и Q и т. д., получим выпуклый многогранник, ограниченный двадцатью треугольниками (фиг. 2).

Двенадцать из этих треугольников (KPK', KQK', \dots) имеют каждый одной своей стороной один из шести равных отрезков $KK' = LL' = MM' = NN' = PP' = QQ'$. Каждый из остальных восьми треугольников (KMP, \dots) имеет своими вершинами концы трех различных из тех же шести отрезков. Среди тридцати ребер построенного таким образом многогранника мы имеем, с одной стороны, шесть равных ребер, перечисленных выше, и, с другой стороны, — двадцать четыре равных ребра $KM = MP = KP = \dots$. Но AK есть большая часть отрезка OA , разделенного в среднем и крайнем отношении, так что

$$OA : AK = AK : (OA - AK),$$

или

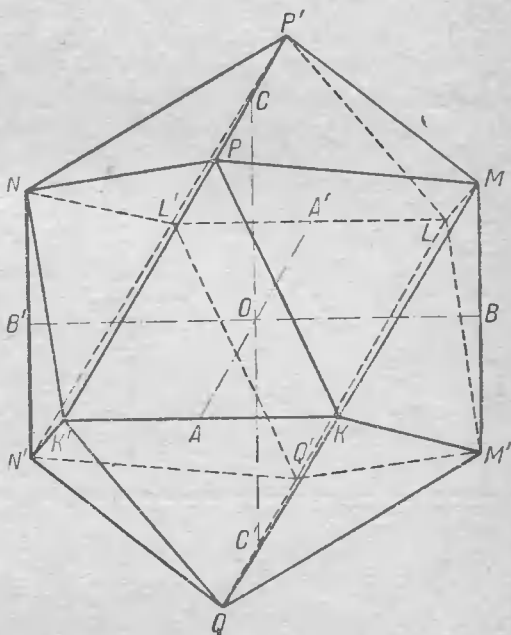
$$OA^2 = AK^2 + OA \cdot AK. \quad (1)$$

Поэтому (фиг. 3)

$$\begin{aligned} PK^2 &= PA^2 + AK^2 = OC^2 + (OA - CP)^2 + AK^2 = \\ &= OC^2 + OA^2 - 2OA \cdot CP + CP^2 + AK^2 = \\ &= 2OA^2 - 2OA \cdot AK + 2AK^2 \end{aligned}$$

(так как $OC = OA$, $CP = AK$). Отсюда в силу (1)

$$\begin{aligned} PK^2 &= 2(AK^2 + OA \cdot AK) - 2OA \cdot AK + 2AK^2 = \\ &= 4AK^2 = KK'^2, \end{aligned}$$



Фиг. 2.

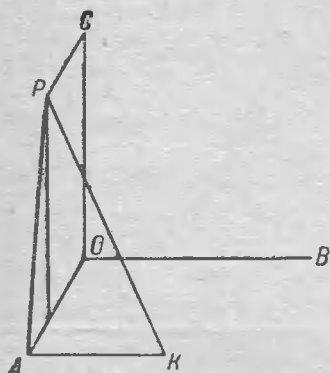
так что $PK = KK'$, и все двадцать граней построенного многогранника — равносторонние треугольники.

Далее, все двенадцать вершин построенного многогранника очевидно равноудалены от точки O . Следовательно, все правильные треугольные пирамиды, имеющие своими основаниями грани многогранника и общей вершиной — точку O , равны между собой, и поэтому имеют равные углы при основании. Отсюда вытекает, что все двугранные углы построенного многогранника равны между собой, так как каждый из этих углов вдвое более угла при основании в одной из этих пирамид.

Итак, построенный многогранник ограничен двадцатью равными правильными треугольниками и имеет равные двугранные углы, т. е. представляет собой правильный икосаэдр.

3. Обозначим через a — ребро правильного икосаэдра, через R, r, ϱ — соответственно радиусы шаров описанного, вписанного и касающегося всех ребер (заметим, что существование этих трех шаров вытекает из сказанного в п. 2), через S и V — поверхность и объем икосаэдра.

Мы имеем (фиг. 2)



Фиг. 3.

так как AK есть большая часть отрезка OA , разделенного в среднем и крайнем отношении, то

$$AK = \frac{1}{2} OA \cdot (\sqrt{5} - 1),$$

и, следовательно,

$$a = \varrho (\sqrt{5} - 1), \quad \varrho = \frac{1}{4} a (\sqrt{5} + 1).$$

Далее

$$R^2 = OK^2 = \varrho^2 + \frac{1}{4} a^2,$$

откуда

$$R = \frac{1}{4} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Радиус вписанного шара r есть очевидно высота правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a , а боковое — ребро R ; следовательно,

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{a^2}{24} (7 + 3\sqrt{5})$$

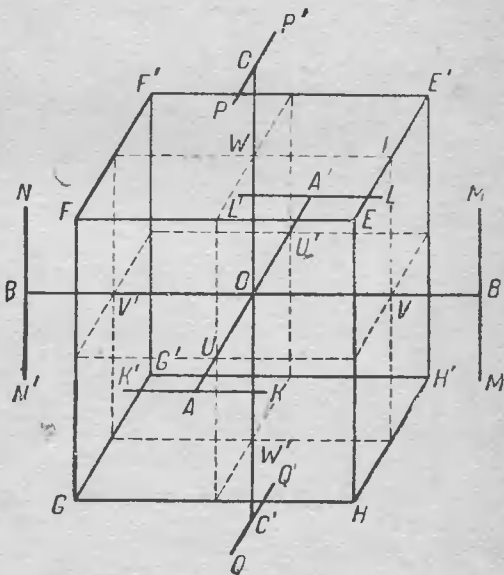
и

$$r = \frac{1}{12} a \sqrt{3} (3 + \sqrt{5}).$$

Наконец, для поверхности и объема имеем

$$S = 20 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = 5a^2 \sqrt{3}, \quad V = \frac{1}{3} S r = \frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5}).$$

4. Для построения правильного додекаэдра строим, как и выше, три равных попарно перпендикулярных отрезка AA' , BB' , CC' , имеющих общую середину O (фиг. 4). Через концы первого отрезка AA' проводим прямые KK' и LL' , параллельные второму отрезку BB' , и откладываем на них отрезки $AK = AK' = A'L = A'L'$, каждый из которых равен (в отличие от предыдущего построения) меньшей части отрезка OA , разделенного в среднем и крайнем отношении. Аналогично строим и отрезки $BM = BM' = B'N = B'N' = CP = CP' = C'Q = C'Q'$, каждый из которых равен отрезку AK . Далее делим отрезки OA и OA' в среднем и крайнем отношении соответственно в точках U и U' так, что большие части прилежат к точке O , и проводим через точки U и U' плоскости, перпендикулярные к прямой AA' . Выполняя те же построения для отрезков OB , OB' , OC , OC' , получим куб $EFGHE'F'G'H'$. Наконец, соединяя точку K с точками E и H , точку K' — с F и G и т. д., получим выпуклый многогранник (фиг. 5).



Фиг. 4.

Построенный многогранник ограничен двенадцатью равными между собой равнобедренными треугольниками (MEE' , KEN , ...) и двенадцатью равнобедренными трапециями ($EE'P'P$, $ЕНМ'М$, ...), также равными между собой. Однако, как мы сейчас покажем, каждый из этих треугольников лежит в одной плоскости с одной из двенадцати трапеций (например, треугольник MEE' — с трапецией $EE'P'P$), так что многогранник ограничен двенадцатью равными пятиугольниками. Чтобы это доказать, достаточно убедиться, что точки M , I и C (фиг. 4 и 6) лежат на одной прямой. Но так как отрезки $OW = WI$ и $WC = BM = VB = XM$ (где $MX \parallel OB$) соответственно равны большей и меньшей частям отрезка OB , разделенного в среднем и крайнем отношении, то

$$OC : OW = OW : BM$$

Отсюда следует, что

$$(OC - OW) : OW = (OW - BM) : BM,$$

или

$$WC : WI = XI : XM,$$

откуда и вытекает, что точки M , I и C лежат на одной прямой.

Все стороны каждой грани построенного многогранника равны. Рассмотрим, например, грань $MEE'P'P$. Очевидно, что $PE = EM = ME' = E'P'$ по построению. Пользуясь прямоугольными треугольниками EIM (фиг. 4) и IXM (фиг. 6), имеем:

$$EM^2 = EI^2 + IM^2 = EI^2 + MX^2 + (VI - VX)^2.$$

Но

$$EI = VI = OV, \\ XM = VX = VB,$$

так что

$$EM^2 = 2OV^2 + 2VB^2 - 2OV \cdot VB. \quad (2)$$

Так как

$$OB : OV = OV : VB,$$

то

$$OV : VB = (OB - OV) : (OV - VB) = VB : (OV - VB),$$

откуда

$$OV^2 = VB^2 + OV \cdot VB. \quad (3)$$

Подставляя это значение OV^2 в (2), находим

$$EM^2 = 4BV^2 = PP'^2.$$

Таким образом, все стороны грани $MEE'P'P$ равны между собой; то же имеет место для остальных граней.

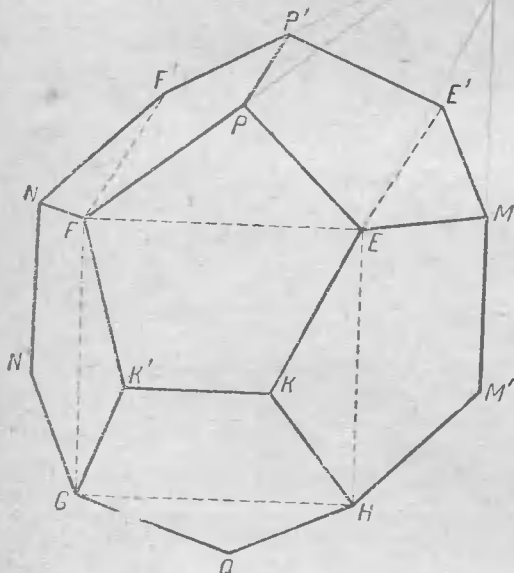
Покажем далее, что все вершины построенного многогранника равноудалены от точки O . Для этого достаточно доказать, что $OE = OM$. Но

$$OE = OV \sqrt{3}$$

в силу соотношения между ребром и диагональю куба; с другой стороны,

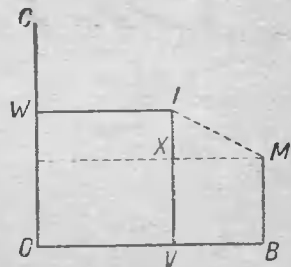
$$OM^2 = OB^2 + BM^2 = (OV + VB)^2 + BM^2 = \\ = OV^2 + 2OV \cdot VB + 2VB^2 = 3OV^2$$

в силу равенства $BM = VB$ и соотношения (3), так что $OE = OM$.



Фиг. 5.

Из того обстоятельства, что все вершины равноудалены от точки O , следует, что каждая грань вписана в окружность (а именно, — в окружность, по которой описанный шар пересекает плоскость этой грани). Так как все стороны каждой грани между собой равны и каждая грань вписана в окружность, то грани построенного многогранника представляют собой правильные многогранники. В силу тех же соображений, что и для икосаэдра, все двугранные углы построенного многогранника равны, так что этот многогранник представляет собой правильный додекаэдр.



Фиг. 6.

Вывод основных метрических соотношений в правильном додекаэдре выполняется совершенно так же, как это было сделано для икосаэдра, так что мы можем на нем не останавливаться.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Н. А. Никулин (Уральск)

В настоящей заметке рассмотрены геометрические построения некоторых кривых третьего порядка.

Приведенные здесь построения этих кривых мне нигде встречать не приходилось. Они очень просты и, мне кажется, удобны на практике. Так как построения всех указанных в этой заметке кривых очень сходны и могут быть получены из построения более общей кривой, совместное рассмотрение их считаю целесообразным.

1. Рассмотрим сначала построение кривой, определяемой в прямоугольной системе координат уравнением:

$$y^2x = ax^2 + by^2. \quad (1)$$

Эта кривая была названа Лонгшаном (Longchamps) смешанной кубикой (*la cubique mixte*)¹⁾. Для построения кривой (1) возьмем две параллельные прямые PQ , RS на расстоянии a , т. е. $QS = a$ ($QS \perp PQ$), и точку O на расстоянии b от прямой RS ($OS = b$). Через точку O проведем произвольную прямую OM (фиг. 1); затем через точку N пересечения OM с RS — прямую PN , перпендикулярно к OM , и через точку P пересечения PN и QP — прямую PM перпендикулярно к PQ . Точка M пересечения PM с OM принадлежит кривой (1).

Действительно, из подобия прямоугольных треугольников ODM и PNM ($MD \perp OD$) имеем:

$$\frac{MD}{OD} = \frac{PN}{MN},$$

¹⁾ G. Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables*, том I, стр. 118.

ресекающая PL с OY прямую PM перпендикулярно к OY . Точка M пересечения PM и OM принадлежит кривой Ролля. В самом деле, из подобия прямоугольных треугольников ODM и NPM ($MD \perp OR$) имеем:

$$\frac{OD}{DM} = \frac{NM}{PN},$$

откуда

$$\frac{OD^2}{DM^2} = \frac{NM^2}{PN^2}.$$

Но

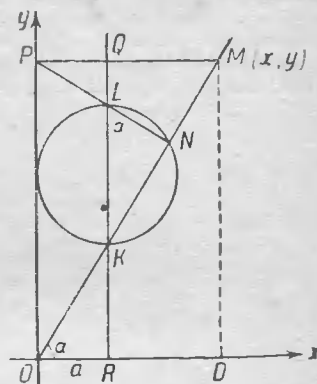
$$PN^2 = ON \cdot NM.$$

Следовательно:

$$\frac{OD^2}{DM^2} = \frac{NM}{ON}$$

или

$$\frac{OD^2}{DM^2} = \frac{OM - (OK + KN)}{OK + KN}. \quad (4)$$



Фиг. 2.

Из прямоугольных треугольников ODM , ORK , KNL в свою очередь будем соответственно иметь:

$$OM = \frac{OD}{\cos \alpha}, \quad OK = \frac{OR}{\cos \alpha},$$

$$KN = KL \sin \alpha$$

(где α — угол, который образует прямая OM с OR). Подставляя в равенство (4) вместо OM , OK , KN найденные выражения, получим:

$$\frac{OD^2}{DM^2} = \frac{OD - (OR + KL \sin \alpha \cos \alpha)}{OR + KL \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (5)$$

Если примем прямые OD и OY соответственно за оси абсцисс и ординат прямоугольной системы координат и заметим, что $OD = x$, $DM = y$ (где x , y — координаты точки M), $OR = a$, $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то из равенства (5) найдем:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x(x^2 + y^2) - a(x + y)^2}{a(x + y)^2},$$

откуда

$$xy^2 = a(x + y)^2. \quad (2)$$

Следовательно, точка M лежит на кривой (2)¹⁾. Из уравнения (2) видим, что кривая Ролля есть кривая третьего порядка; прямая QR ($x = a$) служит ее асимптотой.

¹⁾ Тем же приемом, как и в случае кривой Лонгшана (§ 1, сноска), можно показать, что с помощью описанного построения может быть получена любая точка кривой. (Прим. ред.)

что $OD = x$, $DM = y$ (где x, y — координаты точки M), $OR = b$, $O'R = a$, $KL = c$, $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, из последнего равенства (7) будем иметь

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{x(x^2 + y^2) - b(x^2 + y^2) - cxy}{a(x^2 + y^2) + cxy};$$

отсюда легко получим уравнение искомой кривой:

$$xy^2 = ax^2 + by^2 + cxy^1). \quad (8)$$

Эта кривая третьего порядка. Асимптотой ее служит прямая QR , уравнение которой $x = b$.

Полагая в уравнении (8) $c = 0$, получим

$$xy^2 = ax^2 + by^2,$$

т. е. уравнение кривой (1); полагая же $b = a$, $c = 2a$, получим

$$xy^2 = a(x + y)^2,$$

т. е. уравнение кривой Ролля. Если теперь положим в уравнении (8) $a = bm^2$, $c = -2bm$, то будем иметь

$$xy^2 = b(y - mx)^2. \quad (9)$$

Эта кривая была изучена Эльджем (M. Elge)²⁾. Построение кривой (9) ничем не отличается от построения кривой (8).

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

В. Л. Теуш (Севастополь)

В учебной литературе по аналитической геометрии рассматриваются уравнения в векторной форме только для прямой линии и окружности. Векторные уравнения других кривых второго порядка обычно не рассматриваются. Между тем, основная и наиболее громоздкая задача плоской геометрии — исследование общего уравнения второго порядка и приведение его к каноническим уравнениям — может быть также решена в векторной форме, представляющей ряд преимуществ.

Возьмем общее уравнение кривой второго порядка:

$$\Phi(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

и преобразуем его тождественно к виду

$$\Phi(x, y) \equiv (a_1x + a_2y)^2 + \sigma(x^2 + y^2) + 2(b_1x + b_2y) + F = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Тем же приемом, как и в случае кривой Лонгшана (§1, сноска), можно показать, что с помощью описанного построения может быть получена любая точка кривой. (Прим. ред.)

²⁾ G. Teixeira, *Traité des courbes speciales*, т. I, стр. 117, § 137.

Сравнивая в обоих уравнениях коэффициенты при одинаковых степенях x и y , находим для новых параметров следующие уравнения:

$$b_1 = D, \quad a_1^2 = A - \sigma > 0,$$

$$b_2 = E, \quad a_2^2 = C - \sigma > 0,$$

$$a_1^2 a_2^2 = (A - \sigma)(C - \sigma) = B^2,$$

откуда $\sigma^2 - (A + C)\sigma + \delta = 0$, где $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

Из этого квадратного уравнения находим

$$\sigma = \frac{A + C - \sqrt{(A + C)^2 - 4\delta}}{2} = \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2},$$

где знак минус перед радикалом выбран в соответствии с условием $A - \sigma > 0$.

Другой корень, σ_1 , понадобится нам впоследствии

$$\sigma_1 = \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2}.$$

Введя теперь переменный радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

и постоянные вектора

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j},$$

мы видим, что уравнение (2) можно записать в векторной форме:

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv (\mathbf{a}\mathbf{r})^2 + \sigma\mathbf{r}^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{r} + F = 0.$$

Это и есть общее уравнение кривой второго порядка.

Займемся его исследованием.

1. Если $\mathbf{a} = 0$, то

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \sigma\mathbf{r}^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{r} + F = 0$$

есть, как известно, уравнение окружности (или точки, или мнимой окружности, а в случае $\sigma = 0$ — уравнение прямой).

Условие $\mathbf{a} = 0$, т. е. $a_1 = a_2 = 0$, означает $A = C (= \sigma)$ и $B = 0$, — известные аналитические условия того, что уравнение представляет уравнение окружности.

2. Кривая имеет центр в начале координат, если

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(-\mathbf{r}) = 0.$$

Это возможно при отсутствии члена, содержащего \mathbf{r} в первой степени, т. е. при $\mathbf{b} = 0$.

Пусть центр имеет векторную координату \mathbf{c} . Перенесем начало координат в центр кривой:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{c}.$$

Преобразованное уравнение примет вид:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}' + \mathbf{c}) = \Psi(\mathbf{r}') \equiv \\ \equiv (a\mathbf{r}')^2 + \sigma\mathbf{r}'^2 + 2[a(ac) + \sigma c + b]\mathbf{r}' + (ac)^2 + \sigma c^2 + 2bc + F = 0,$$

или сокращенно:

$$(a\mathbf{r}')^2 + \sigma\mathbf{r}'^2 + 2b'\mathbf{r}' + F' = 0.$$

Чтобы получить координату центра \mathbf{c} , нужно приравнять нулю коэффициент b' и решить полученное уравнение относительно $\mathbf{c} = x_c\mathbf{i} + y_c\mathbf{j}$. Но это выражение для $2b'$ представляет собой не что иное, как результат дифференцирования функции Φ по \mathbf{r} как по скаляру \mathbf{c} заменой затем \mathbf{r} через \mathbf{c} . Такая своеобразная производная от квадратной функции вектора $\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}}$, как легко убедиться, представляет собой всегда вектор \mathbf{c} компонентами $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Итак, уравнение для \mathbf{c} будет

$$b' = \left(\frac{d\Phi}{d\mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{c}} = 0,$$

а в декартовых координатах:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = x_c, y = y_c,$$

или по сокращении на 2:

$$\left. \begin{aligned} Ax_c + By_c + D = 0, \\ Bx_c + Cy_c + E = 0, \end{aligned} \right\}, \text{ откуда } \left\{ \begin{aligned} x_c &= \frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\delta}, \\ y_c &= \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\delta}. \end{aligned} \right.$$

Отсюда видно условие существования центра: $\delta \neq 0$, влекущее за собой условие $\sigma \neq 0$. Последнее условие можно впрочем усмотреть непосредственно из векторного уравнения для \mathbf{c} .

Рассмотрим теперь свободный член F' . Он равен $\Phi(\mathbf{c})$. Далее:

$$F' = \mathbf{c}[a(ac) + \sigma c + b] + bc + F = \mathbf{c} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{c}} + \\ + bc + F = bc + F.$$

Аналитически отсюда получаем:

$$F' = \frac{\Delta}{\delta}, \quad \text{где } \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Итак, уравнение кривой с центром в начале координат есть:

$$\Psi(\mathbf{r}') = (a\mathbf{r}')^2 + \sigma\mathbf{r}'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Пусть \mathbf{a}^0 — единичный вектор, определяемый условием

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0,$$

и \mathbf{j} — перпендикулярный к \mathbf{a}^0 единичный вектор; разложим \mathbf{r}' по направлениям \mathbf{a}^0 и \mathbf{j} . Тогда уравнение преобразуется к виду:

$$a^2 (\mathbf{a}^0 \mathbf{r}')^2 + \sigma [(\mathbf{a}^0 \mathbf{r}')^2 + (\mathbf{j} \mathbf{r}')^2] + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

или

$$(a^2 + \sigma) (\mathbf{a}^0 \mathbf{r}')^2 + \sigma (\mathbf{j} \mathbf{r}')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Возьмем теперь направление оси x по \mathbf{a}^0 : $\mathbf{i} = \mathbf{a}^0$, а оси y по \mathbf{j} , тогда $\mathbf{a}^0 \mathbf{r}' = x$; $\mathbf{j} \mathbf{r}' = y$. Кроме того, как легко убедиться из предыдущего,

$$a^2 + \sigma = \sigma_1.$$

Теперь наше уравнение принимает вид

$$\sigma_1 x^2 + \sigma y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{\Delta}{\sigma_1 \delta}} + \frac{y^2}{\frac{\Delta}{\sigma \delta}} + 1 = 0.$$

Мы пришли к канонической форме уравнения центральной кривой. Из квадратного уравнения для σ следует, что $\delta = \sigma \sigma_1$, т. е. если $\delta > 0$, то знаки σ и σ_1 одинаковы (эллипс действительный или мнимый); если же $\delta < 0$ — знаки σ и σ_1 различны (гипербола); если при этом $\Delta = 0$, то имеем пару прямых:

$$(\mathbf{a} \mathbf{r} + \sqrt{\sigma} \mathbf{r}) (\mathbf{a} \mathbf{r} - \sqrt{\sigma} \mathbf{r}) = 0.$$

3. Кривая не имеет центра, если $\delta = \sigma = 0$. Уравнение имеет вид:

$$(\mathbf{a} \mathbf{r})^2 + 2 \mathbf{b} \mathbf{r} + F = 0.$$

Различаем два случая:

1) $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$.

Вводим скаляр λ так, чтобы было $\mathbf{b} - \lambda \mathbf{a} \perp \mathbf{a}$ и, следовательно, $\mathbf{a} (\mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}) = 0$, откуда

$$\lambda = \frac{\mathbf{a} \mathbf{b}}{a^2} = \frac{\sqrt{A} D + \sqrt{C} E}{A + C}$$

(так как в этом случае $a_1^2 = A$, $a_2^2 = C$).

Преобразуем уравнение тождественно:

$$(\mathbf{a} \mathbf{r} + \lambda)^2 + 2 \mathbf{b} \mathbf{r} - 2 \lambda (\mathbf{a} \mathbf{r}) - \lambda^2 + F = 0,$$

или

$$(\mathbf{a} \mathbf{r} + \lambda)^2 + 2 (\mathbf{b} - \lambda \mathbf{a}) \mathbf{r} - \lambda^2 + F = 0.$$

Принимая теперь за оси координат две взаимно перпендикулярные прямые:

$$ar + \lambda = 0 \quad (\text{ось } x)$$

и

$$2(b - \lambda a)r - \lambda^2 + F = 0 \quad (\text{ось } y)$$

мы получаем (вводя соответствующие нормирующие множители и обозначения) каноническое уравнение параболы:

$$py^2 + qx = 0.$$

2) $a \parallel b$.

Тогда $b = \mu a$, откуда

$$\mu^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{D^2 + E^2}{A + C}.$$

Уравнение имеет вид:

$$(ar)^2 + 2\mu ar + \mu^2 - \mu^3 + F = 0,$$

$$(ar + \mu)^2 = \mu^3 - F.$$

Мы имеем пару параллельных прямых:

$$ar + \mu = \pm \sqrt{\mu^3 - F}.$$

Обычные аналитические условия для последних случаев отсюда легко выводятся (см. Смирнов „Курс высшей математики“, т. I).

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. И. Забелло (Челябинск)

§ 1. Пусть $f(x)$ — полином m -ой степени с действительными коэффициентами:

$$f(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_{m-1} x + p_m \quad (p_0 > 0), \quad (1)$$

один из простых действительных корней которого x заключается в промежутке $(\beta_1; \beta_2)$, $\beta_1 < \beta_2$; $f'(x)$ в данном промежутке знакопостоянна. Пусть далее a — приближенное значение корня x , причем

$$|x - a| < 1, \quad \beta_1 < a < \beta_2.$$

Представим x в виде такой суммы:

$$x = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = a + \sum a_i, \quad (2)$$

где $\sum a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, $a_i = \frac{a_i}{10^i}$; n — сколько угодно

большое число. Подставляя это значение x в функцию $f(x)$ и разлагая ее по степеням $\sum a_1$, получим:

$$f(a + \sum a_1) = f(a) + (\sum a_1) f'(a) + \frac{1}{2!} (\sum a_1)^2 f''(a) + \\ + \frac{1}{3!} (\sum a_1)^3 f'''(a) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} (\sum a_1)^{m-1} f^{(m-1)}(a) + \\ + \frac{1}{m!} (\sum a_1)^m f^{(m)}(a) = 0. \quad (3)$$

Написав каждый из множителей $(\sum a_1)^k$ в развернутом виде, получим из (3):

$$f(a + \sum a_1) = f(a) + (\sum a_1) f'(a) + \frac{1}{2!} (\sum a_1^2 + 2 \sum a_1 a_2) f''(a) + \\ + \frac{1}{3!} (\sum a_1^3 + \frac{3!}{2!} \sum a_1^2 a_2 + 3! \sum a_1 a_2 a_3) f'''(a) + \\ + \frac{1}{4!} (\sum a_1^4 + \frac{4!}{3!} \sum a_1^3 a_2 + \frac{4!}{2! 2!} \sum a_1^2 a_2^2 + \\ + \frac{4!}{2!} \sum a_1^2 a_2 a_3 + 4! \sum a_1 a_2 a_3 a_4) f^{IV}(a) + \dots + \\ + \frac{1}{m!} (\sum a_1^m + \frac{m!}{(m-1)!} \sum a_1^{m-1} a_2 + \dots + \\ + m! \sum a_1 a_2 \dots a_m) f^{(m)}(a) = 0. \quad (4)$$

(Здесь $\sum a_1^m = a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$, $\sum a_1^{m-1} a_2 = a_1^{m-1} a_2 + a_1^{m-1} a_3 + \dots + a_n^{m-1} a_{n-1}$ и т. д.)

Левую часть последнего равенства расположим по возрастающим степеням числа $\frac{1}{10}$; при этом вместо $f^{(k)}(a)$ будем писать $f^{(k)}$:

$$\left\{ f + \frac{1}{10} a_1 f' \right\} + \frac{1}{10^2} \left\{ a_2 f' + a_1^2 \frac{f''}{2!} \right\} + \frac{1}{10^3} \left\{ a_3 f' + 2 a_1 a_2 \frac{f''}{2!} + a_1^3 \frac{f'''}{3!} \right\} + \\ + \frac{1}{10^4} \left\{ a_4 f' + (a_2^2 + 2 a_1 a_3) \frac{f''}{2!} + 3 a_1^2 a_2 \frac{f'''}{3!} + a_1^4 \frac{f^{IV}}{4!} \right\} + \dots + \\ + \frac{1}{10^k} \left\{ \left(\sum'_k a_1 \right) f' + \left(\sum'_k a_1 \right)^2 \frac{f''}{2!} + \left(\sum'_k a_1 \right)^3 \frac{f'''}{3!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \left(\sum'_k a_1 \right)^k \frac{f^{(k)}}{k!} \right\} + \dots = 0. \quad (5)$$

Здесь $\sum'_k a_1$ есть сумма всех слагаемых a_i веса k , т. е. просто a_k ; $(\sum'_k a_1)^2$ есть сумма всех слагаемых из $(\sum a_1)^2$ веса k , ..., $(\sum'_k a_1)^k$ есть сумма всех слагаемых, взятых из суммы $(\sum a_1)^k$ веса k (под весом члена $a_m^{n_1} a_n^{n_2} \dots a_r^{n_r}$ здесь подразумевается сумма произведений значков у каждого a , стоящих вверху и внизу, т. е. сумма $mn_1 + pn_2 + \dots + rn_r$).

взятых из общей суммы $(\sum A_2)^{k-1}$, т. е. просто A_2^{k-1} (все нижние значки при A не меньше 2).

Чтобы убедиться в том, что a_k имеет приведенное значение, рассмотрим формулу Бурмана-Лагранжа (Bürmann, Lagrange) разложение одной функции по степеням другой:

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[f(z) - f(a)]^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[\varphi'(z) \left(\frac{z-a}{f(z) - f(a)} \right)^m \right]_{z=a},$$

где $\varphi(z)$ и $f(z)$ — аналитические функции¹⁾ внутри круга C , содержащего только один нуль функции $f(z)$, a — некоторая точка внутри C , причем разность $|z-a|$ достаточно мала. $[f'(z)]$ отлична от нуля внутри C . При $\varphi(z) = z$ получим ряд:

$$z = a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[f(z) - f(a)]^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left(\frac{z-a}{f(z) - f(a)} \right)^m_{z=a}.$$

Представим дробь $\frac{z-a}{f(z) - f(a)}$ в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{z-a}{f(z) - f(a)} &= \frac{z-a}{(z-a)f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) + \dots} = \\ &= \frac{1}{f'(a) + \frac{z-a}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{k-2}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a) + \dots} = \\ &= \frac{1}{f'(a) [1 + A_2 \xi + A_3 \xi^2 + \dots + A_{k-1} \xi^{k-2} + \dots]}, \end{aligned}$$

где

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k! f'(a)}, \quad \xi = z - a.$$

Отсюда

$$z = a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[f(z) - f(a)]^m}{m! [f'(a)]^m} \cdot \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} (u^{-m})_{\xi=0},$$

где

$$u = 1 + A_2 \xi + A_3 \xi^2 + \dots + A_k \xi^{k-1} + \dots = 1 + \sum A_i \xi^{i-1},$$

$$[i = 2, 3, \dots; f'(a) \neq 0].$$

Но

$$\begin{aligned} (1 + \sum A_i \xi^{i-1})^{-m} &= 1 - m \left(\sum A_i \xi^{i-1} \right) + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \left(\sum A_i \xi^{i-1} \right)^2 - \dots \\ &\dots + (-1)^k \frac{m(m+1) \dots (m+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} \left(\sum A_i \xi^{i-1} \right)^k + \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты при ξ^{k-1} в разложении будут:

$$\begin{aligned} &\text{в } \sum A_i \xi^{i-1} && A_k, \\ &\text{в } \left(\sum A_i \xi^{i-1} \right)^2 && \left(\sum'_{k+1} A_2 \right)^2, \end{aligned}$$

¹⁾ z — комплексное переменное.

$$\begin{aligned} & \text{в } \left(\sum A_i \xi^{i-1} \right)^3 \quad \left(\sum'_{k+2} A_2 \right)^3, \\ & \dots \dots \dots \left(\sum A_i \xi^{i-1} \right)^p \quad \dots \dots \dots \left(\sum'_{p+k-1} A_2 \right)^p, \end{aligned}$$

где $\left(\sum' A_2 \right)^p$, как и раньше, есть сумма всех слагаемых веса $p + k - 1$ ($p = 1, 2, 3, \dots$).

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} (u^{-m})_{\xi=0} &= (k-1)! \left[-mA_k + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2} \left(\sum'_{k+1} A_2 \right)^2 - \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^k \frac{m(m+1) \dots (m+k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} \left(\sum'_{2k-2} A_2 \right)^k \right]. \end{aligned}$$

Если z — нуль функции $f(z)$ (внутри круга C), то $f(z) = 0$ и

$$z = a + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_0^m \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} (u^{-m})_{\xi=0} = a + a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^{k-1} A_0^k \left\{ A_k - \frac{k+1}{1 \cdot 2} \left(\sum'_{k+1} A_2 \right)^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\sum'_{k+2} A_2 \right)^3 - \dots + \right. \\ & \left. + (-1)^k \frac{(k+1)(k+2) \dots (2k-2)}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} \left(\sum'_{2k-2} A_2 \right)^{k-1} \right\}. \end{aligned}$$

Полученное значение для a_k должно совпасть при z вещественном с a_k из формул (II), так как формулы (2) и (8) представляют одно и то же разложение. (Знаки внизу \sum' указывают вес каждого слагаемого суммы.)

§ 2. Обратимся к формулам (II). В правой части формулы $(a_k) \left(\sum' A_2 \right)^t$ ($t = 2, 3, \dots, k-1$) есть сумма слагаемых веса $k + t - 1$, взятых из общей суммы $\left(\sum A_2 \right)^t = (A_2 + A_3 + \dots + A_n)^t$. Если в $\left(\sum' A_2 \right)^t$ положить все $A_i = 1$, то получим сумму коэффициентов при всех членах разложения $\left(\sum A_2 \right)^t = \sum \frac{t!}{k_2! k_3! \dots k_s!} \times \times A_2^{k_2} A_3^{k_3} \dots A_s^{k_s}$ одного веса m , т. е. всех членов, у которых

$$\begin{aligned} k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_s &= t, \\ 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + \dots + sk_s &= m \quad (m > t). \end{aligned}$$

Докажем, что эта сумма равна C_{m-1}^{t-1} . Рассмотрим сумму $\sum A_i \xi^i$, где $i \geq 2$, ξ — некоторый параметр. Тогда

$$\left(\sum A_i \xi^i \right)^t = \sum \frac{t!}{k_2! k_3! \dots k_s!} A_2^{k_2} A_3^{k_3} \dots A_s^{k_s} \xi^{2k_2 + 3k_3 + \dots + sk_s},$$

где

$$2k_2 + 3k_3 + \dots + sk_s = m.$$

Положив все $A_i = 1$, получим:

$$\begin{aligned} (\sum \xi^i)^t &= (\xi^2 + \xi^3 + \dots + \xi^n)^t = \xi^{2t} \frac{(1 - \xi^{n-1})^t}{(1 - \xi)^t} = \\ &= \xi^{2t} (1 - \xi^{n-1})^t (1 - \xi)^{-t} = \xi^{2t} (1 - \xi^{n-1})^t \left[1 + t\xi + \frac{t(t+1)}{1 \cdot 2} \xi^2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \frac{t(t+1)(t+2) \dots (t+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \xi^p + \dots \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, искомый коэффициент равен коэффициенту при ξ^m разложения $(\sum \xi^i)^t$ ($i \geq 2$), или, если n достаточно велико, коэффициенту при ξ^{m-2t} разложения:

$$1 + t\xi + \frac{t(t+1)}{1 \cdot 2} \xi^2 + \dots + \frac{t(t+1)(t+2) \dots (t+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \xi^p + \dots$$

Искомый коэффициент равен

$$\begin{aligned} \frac{t(t+1)(t+2) \dots (t+m-2t-1)}{(m-2t)!} &= \frac{t(t+1)(t+2) \dots (m-t-1)}{(m-2t)!} = \\ &= C_{m-t-1}^{m-2t} = C_{m-t-1}^{t-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, между прочим, при $A_2 = A_3 = \dots = A_k = \dots = M$ получим:

$$\begin{aligned} \sum' A_2 &= M; \quad (\sum' A_2)^2 = C_{k-2}^1 M^2; \quad (\sum' A_2)^3 = C_{k-2}^2 M^3; \dots; \\ (\sum' A_2)^{k-1} &= C_{k-2}^{k-2} M^{k-1} = M^{k-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

§ 3. Рассмотрим ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots, \quad (10)$$

членами которого являются соответствующие значения всех a_i из формул (II). Пусть M будет наибольшая из положительных величин $|A_2|, |A_3|, |A_4|, \dots, |A_n|$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq |A_0^k| \left\{ |A_k| + \frac{k+1}{1 \cdot 2} |(\sum' A_2)^2| + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} |(\sum' A_2)^3| + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} |(\sum' A_2)^{k-1}| \right\} < |A_0^k| \left(M + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k+1}{1 \cdot 2} C_{k-2}^1 M^2 + \frac{(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} C_{k-2}^2 M^3 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} M^{k-1} \right) \end{aligned}$$

[см. (9) § 2]; заменив все коэффициенты при M^i наибольшим коэффициентом при M^{k-1} ($k > 2$), получим:

$$\begin{aligned} |a_k| &< \frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} |A_0^k| (1 + C_{k-2}^1 M + \\ &\quad + C_{k-2}^2 M^2 + \dots + M^{k-2}) M = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} |A_0^k| N^{k-2} M, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$N = 1 + M.$$

Ряд

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k + \dots, \quad (12)$$

где

$$b_1 = |A_0|, \quad b_2 = |A_0^2| M, \quad b_3 = 2 |A_0^3| MN, \dots, \\ b_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3) \dots (2k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} |A_0^k| N^{k-2} M, \dots$$

будет усиливающий по отношению к ряду, составленному из абсолютных значений членов ряда (10), т. е. к ряду:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_k| + \dots$$

Применяя к ряду (12) признак сходимости Даламбера, получим:

$$\lim_{k \Rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2(2k-1)}{k+1} |A_0 N| = 4 |A_0 N|.$$

Ряд (12) будет сходящийся, если $|A_0 N| < \frac{1}{4}$. При этом условии ряд (10) будет абсолютно сходящимся. Так как $|A_0|$ можно сделать сколь угодно малым, то указанное соотношение легко может быть достигнуто. Из абсолютной сходимости ряда (10) (при $|A_0 N| < \frac{1}{4}$) следует:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots| < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - a - a_1 - a_2 - \dots - a_n| = 0,$$

или

$$x = a + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (13)$$

Как бы мы ни сужали промежуток $(\beta_1; \beta_2)$, сумма $a + \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ при некотором добавочном ограничении, которое мы наложим на $|A_0|$, не выйдет из промежутка. Из соотношения

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{2(2k-1)}{k+1} |A_0 N|, \quad (B)$$

где b_k, b_{k+1} — члены ряда (12), имеем, полагая $|A_0 N| = \eta$:

$$b_2 < 4\eta b_1, \quad b_3 < (4\eta)^2 b_1, \quad b_4 < (4\eta)^3 b_1, \quad \dots, \quad b_{k+1} < 4\eta b_k < (4\eta)^k b_1, \dots$$

Так как

$$b_1 = |a_1|,$$

то

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| < \sum_{i=1}^{\infty} b_i < |A_0| (1 + 4\eta + (4\eta)^2 + (4\eta)^3 + \dots) = |A_0| \frac{1}{1 - 4\eta}.$$

Так как

$$\beta_1 < a < \beta_2,$$

то при

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| < |a - \beta|,$$

где $|\alpha - \beta|$ меньшая из двух разностей $|\alpha - \beta_1|$ и $|\alpha - \beta_2|$, найденное из (13) значение для x не выйдет из промежутка (β_1, β_2) . Из последнего неравенства получаем:

$$|A_0| \frac{1}{1-4\eta} < |\alpha - \beta|;$$

следовательно,

$$|A_0| < (1-4\eta) \cdot |\alpha - \beta|.$$

Можно было бы показать, на чем здесь останавливаться не будем, что ограничение, наложенное здесь на $|A_0|$, заключается в ограничении, наложенном выше на произведение $|A_0 N|$.

Числа ряда (10) будем называть: a_1 — первой поправкой, a_2 — второй поправкой, a_3 — третьей поправкой и т. д.

Примечание. Если промежуток (β_1, β_2) достаточно сужен, то за a можно взять один из пределов этого промежутка.

§ 4. Для сходимости ряда (10), как мы видели, достаточно, чтобы было $|A_0 N| < \frac{1}{4}$. Это ограничение можно заменить другим, практически гораздо более удобным. Действительно, в разложении функции $f(x)$ по степеням разности $(x-a)$ можно остановиться на третьем от начала члене:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(\xi),$$

где $\xi = a + \theta(x-a)$ ($0 < \theta < 1$). Тогда за N можно взять $|A'_2| = \left| \frac{f''(\eta)}{2!f'(a)} \right|$, где $f''(\eta)$ — наибольшее арифметическое значение второй производной в данном промежутке [см. (6) § 1]. Этот прием очень удобен, потому что освобождает от необходимости вычислять значения всех производных при заданном значении x , что бывает крайне затруднительно и излишне, когда имеем дело с алгебраическими уравнениями высоких степеней или с трансцендентными функциями. На практике приходится вычислять обычно не больше трех-четырех поправок, если ряд (10) сходится быстро. А для быстрой сходимости ряда (10) нужно подобрать для $|A_0 N|$, или для $|A_0 A'_2|$, значение, близкое к $\frac{1}{10}$, что сделать очень легко.

Остановимся на определении точности произведенного вычисления корня. Из соотношения (B) имеем:

$$b_{n+1} < 4\eta b_n; \quad b_{n+2} < (4\eta)^2 b_n; \quad b_{n+3} < (4\eta)^3 b_n; \dots;$$

$$b_{n+m} < (4\eta)^m b_n; \dots,$$

где

$$\eta = |A_0 N|.$$

Отсюда

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| < b_{n+1} + b_{n+2} + \dots < \frac{4\eta}{1-4\eta} b_n;$$

если

$$\eta \leq \frac{1}{8},$$

то

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots| < b_n.$$

Приняв $|a_n| = |b_n|$, получим правило для оценки точности произведенного вычисления: точность произведенного вычисления корня приблизительно равна последней из вычисленных поправок (на самом деле эта точность выше).

§ 5. Пусть $f(x)$ будет некоторая трансцендентная функция действительного переменного, имеющая простой корень x в некотором промежутке $(\beta_1; \beta_2)$ и разлагающаяся в данном промежутке в ряд по степеням двучлена $(x-a)$, где $\beta_1 < a < \beta_2$ и разность $|x-a|$ достаточно мала. Корень функции $f(x)$ можно тогда представить в таком виде:

$$x = a + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + \sum a_i,$$

где, как и раньше, $a_i = \frac{a_i}{10^i}$. Повторяя рассуждения § 1, мы придем для вычисления величин (поправок) a_i к формулам (II). Очевидно также, что здесь применимы без всяких изменений рассуждения и последующих параграфов.

Из вышеизложенного вытекает такое правило для вычисления простого вещественного корня алгебраического или трансцендентного уравнения $f(x) = 0$, заключенного (корня) в промежутке $(\beta_1; \beta_2)$:

1. Сблизить границы промежутка так, чтобы размер промежутка $(\beta_1; \beta_2)$ был ≤ 1 , и за первое приближенное значение корня взять одну из границ промежутка (с тем, чтобы $|A_0 N|$ или $|A_0 A'_2|$ было $< \frac{1}{4}$, а еще лучше, чтобы $|A_0 N|$ или $|A_0 A'_2|$ было $< \frac{1}{10}$).

2. Найти по правилу Горнера¹⁾ значения функции и ее производных при выбранном приближенном значении x , затем вычислить A_0, A_2, A_3, \dots . Если произведение $|A_0 N|$, или $|A_0 A'_2|$, недостаточно мало, то необходимо сузить промежуток. Попутно можно проверить, будет ли $|A_0| < (1-4\eta) \cdot |\alpha - \beta|$.

3. Вычислить поправки a_1, a_2, \dots по формулам (II). Искомое значение для x получится из равенства $x = a + \sum_{i=1}^k a_i$, где a — первое приближенное значение корня.

4. Точность произведенного вычисления приблизительно равна $|a_k|$.

¹⁾ В случае алгебраического уравнения.

Практика вычисления действительных корней уравнений изложенным способом, как это будет видно из приведенных примеров, весьма проста и удобна. Изложенный способ можно обобщить для вычисления комплексных корней. Эта работа будет проделана в дальнейшем.

Примеры

1. Вычислить вещественный корень уравнения

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Искомый корень заключается в промежутке $(-1, 0)$. Сузив его, получим промежуток $(-\frac{1}{3}, 0)$. За первое приближенное значение x возьмем $-\frac{1}{3}$. Далее см. таблицу:

	1	0	3	1	
$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{28}{9}$	$-\frac{1}{27} = f\left(-\frac{1}{3}\right)$	$A_0 = -\frac{1}{27} : \frac{10}{3} = -\frac{1}{90},$
	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3} = f'\left(-\frac{1}{3}\right)$		$A_2 = -1 : \frac{10}{3} = -\frac{3}{10},$
	1	$-1 = \frac{1}{2!} f''\left(-\frac{1}{3}\right)$			$A_3 = 1 : \frac{10}{3} = \frac{3}{10},$
	$-1 = \frac{1}{3!} f''' \left(-\frac{1}{3}\right)$				$N < 1,4;$
					$ A_0 N < \frac{1}{64}$
					$\left(A_0 < (1 - 4\eta) \cdot \frac{1}{3}\right).$

Ряд поправок будет сходиться очень быстро. По формулам (II) имеем:

$$a_1 = 0,011111;$$

$$a_2 = 0,000037;$$

$$(a_3 = 0,0000001) \quad \text{с точностью до } 10^{-6}.$$

$$\sum a_i \approx a_1 + a_2 + a_3 = 0,011148; \quad x = -\frac{1}{3} + \sum a_i = -0,322185.$$

2. Вычислить корень уравнения

$$x^5 - 8x^4 - x^3 - 2x^2 + 16x + 2 = 0,$$

заклученный в промежутке $(1; 2)$.

Сузим промежутков. Новый промежуток будет (1,2; 1,3). За приближенное значение корня возьмем 1,3 (см. таблицу):

	1	-8	-1	-2	16	2
1,3	1	-6,7	-9,71	-14,623	-3,0099	$-1,91287 = f(1,3)$
	1	-5,4	-16,73	-36,172	$-50,0335 = f'(1,3)$	
	1	-4,1	-22,06	$-64,850 = \frac{1}{2!} f''(1,3)$		
	1	-2,8	$-25,70 = \frac{1}{3!} f'''(1,3)$			
	1	$-1,5 = \frac{1}{4!} f^{IV}(1,3)$				
	1	$= \frac{1}{5!} f^V(1,3)$				

$$A_0 = 0,038231, \quad A_2 = 1,296131, \quad A_3 = 0,51365,$$

$$A_1 = 0,0319, \quad A_5 = 0,02.$$

(До вычисления $\frac{f'''(1,3)}{3!}$ и т. д. нужно проверить, будет ли $|A_0 A'_2| < \frac{1}{4}$).

$$N < 2,3; |A_0 N| < 0,087.$$

$$a_1 = -0,03823$$

$$a_2 = -0,00189$$

$$a_3 = -0,00015$$

$$a_4 = -0,00001$$

$$\sum a_i = -0,04028 \quad x = 1,3 + \sum a_i = 1,25972 \text{ с точностью до } 10^{-4}.$$

3. Вычислить корень уравнения

$$25x^4 + 35x^3 - 39x^2 - 64x - 74 = 0,$$

заключенный в промежутке (1; 2).

Пусть приближенное значение x будет = 2. Найдем A_0, A_2 (см. таблицу):

	25	35	-39	-64	-74
2	25	85	131	198	$322 = f(2)$
	25	135	401	$1000 = f'(2)$	
	25	185	$771 = \frac{1}{2!} f''(2)$		

$$A_0 = 0,322, \quad A_2 = 0,771, \quad |A_0 N| > \frac{1}{4}.$$

Сузим промежуток (1; 2). При $a = 1,6$ будем иметь:

$$A_0 = \frac{43}{680} = 0,06323, \quad A_2 = \frac{285}{272} = 1,04779.$$

Так как $f''(1) = 432$, то $\frac{f''(\xi)}{2!f'(1,6)} < 1; |A_0 A'_2| < 0,06$.

Ряд поправок будет сходиться довольно быстро:

$$A_3 = \frac{325}{816} = 0,39828; \quad A_4 = \frac{125}{2448} = 0,05106.$$

$$a_1 = -0,06323, \quad a_2 = -0,00418, \quad a_3 = -0,00045, \quad a_4 = -0,00006;$$

$$\sum a_1 = -0,06792; \quad x = 1,53208.$$

4. Вычислить корень уравнения

$$x^6 - x^5 + x^4 - 4x^3 - 9x^2 - 3x - 9 = 0,$$

заключенный в промежутке (2; 2,31).

$$a = 2,31.$$

$$A_0 = 0,00714383, \quad A_2 = 1,5501.$$

$$a_1 = -0,0071438, \quad a_2 = 0,00007905.$$

Из соотношения (B) имеем:

$$a_3 = -0,00000175, \quad \sum a_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 0,0072246.$$

Из (B):

$$|a_4| < 2 \cdot 10^{-8}, \quad x = 2,3027754.$$

5. Вычислить корень уравнения

$$f(x) = x - 0,01 \sin x - 0,69 = 0.$$

Корень заключается в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Функция $f(x)$ и ее производные в этом промежутке непрерывны. Первая производная в данном промежутке знакопостоянна. Следовательно, искомый корень — простой. За приближенное значение x возьмем $\frac{\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,785398 - 0,007071 - 0,69 = 0,088327;$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 0,01 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0,99293,$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,01 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 0,007071,$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,01 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0,007071,$$

$$f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f''\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ и т. д.}$$

$$A_0 = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0,088951, \quad A_2 = \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0,003560, \quad A_3 = 0,001186;$$

$$N \approx 1; \quad |A_0 N| < 0,09.$$

Ряд поправок будет сходиться быстро (вместо N лучше было взять A_2'):

$$a_1 = -0,088951, \quad a_2 = -0,000028, \quad a_3 = 4 \cdot 10^{-7};$$

$$\sum a_i = a_1 + a_2 = -0,088979; \quad x = \frac{\pi}{4} + \sum a_i = 0,696419.$$

6. Вычислить действительный корень уравнения:

$$f(x) = x + \ln(1+x) - 1 = 0.$$

Корень заключается в промежутке $(0; 1)$. В данном промежутке функция и ее производные непрерывны; $f'(x)$ — знакпостоянна. За приближенное значение x возьмем 0,8.

$$f(0,8) = 0,387786, \quad f'(0,8) = \frac{14}{9}, \quad \frac{f''(0,8)}{2!} = -\frac{25}{36},$$

$$\frac{f'''(0,8)}{3!} = \frac{125}{3 \cdot 729}, \quad \frac{f^{IV}(0,8)}{4!} = \frac{5^4}{4 \cdot 9^4}, \quad \dots, \quad \frac{f^{(n)}(0,8)}{n!} = \frac{1}{n \cdot (1,8)^n}.$$

$$A_0 = 0,249291, \quad A_2 = -0,099206, \quad A_3 = 0,036743, \quad A_4 = -0,015310.$$

Если за нижнюю границу промежутка вместо 0 взять 0,5, то $|A_2'| < \frac{1}{7}$,

$|A_0 A_2'| < 0,04$. Ряд поправок будет убывать быстро:

$$a_1 = -0,249291, \quad a_2 = 0,006164, \quad a_3 = 0,000263, \quad a_4 = 0,000016.$$

$$\text{Из (B) } a_5 = 0,000001;$$

$$\sum a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_1 = -0,242847;$$

$$x = 0,557153 \text{ с точностью до } \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}.$$

О МЕТОДЕ Э. УИТТЕКЕРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М. Л. Шевелев (Казань)

Э. Уиттекер в 1918 г. опубликовал новый метод для вычисления корней уравнения, отличающийся от старых (например Ньютона, Горнера, Грегге и др.) тем, что он дает буквенную формулу, по которой корень получается путем простой подстановки численных значений вместо букв.

Результат Уиттекера следующий:

Корень уравнения

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

имеющий наименьшее абсолютное значение, дается рядом:

$$x = -\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_0^2 a_2}{a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} - \frac{a_0^3 a_3}{a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}} - \frac{a_0^4 a_4}{a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}} - \dots, \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

где общий член

$$-a_0^n \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_2 \end{vmatrix}.$$

$$v_n = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}}{1}.$$

Приводим пример, данный Уиттекером:

$$x^3 - 4x^2 - 321x + 20 = 0.$$

Здесь $a_0 = 20$, $a_1 = -321$, $a_2 = -4$, $a_3 = 1$, поэтому

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 103121, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = -33127121, \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 337;$$

отсюда имеем

$$v_1 = \frac{20}{321} = 0,062305,$$

$$v_2 = \frac{-20^2 \cdot (-4)}{-321 \cdot 103121} = -0,000048,$$

$$v_3 = \frac{-20^3 \cdot 337}{103121 \cdot (-33127121)} = 0,000001$$

и

$$x = 0,062305 - 0,000048 + 0,000001 = 0,062258.$$

Однако, данный пример Уиттекера относится к числу благоприятных, так как здесь ряд (1) оказался быстро сходящимся и уже достаточно было трех членов ряда, чтобы получить корень с довольно большой точностью. Но это бывает только тогда, когда отношение наименьшего по абсолютной величине корня к каждому из других мало. Во всех других случаях ряд очень медленно сходится, и надо вычислять много членов, чтобы получить желаемую точность корня. Благодаря этому теряется практическая ценность общей формулы (1). Необходимо, однако, отметить, что можно добиться того, чтобы искомый корень был мал по сравнению с другими корнями: 1) по правилу Горнера преобразовать данное уравнение в уравнение, корни которого равны корням данного, уменьшенным на данное число a , где a — приближенное значение искомого корня, или 2) по способу квадратного корня (Энке, Греффе) преобразовать данное уравнение в уравнение, корни которого равны квадратам корней данного. Но при этих преобразованиях мы получаем обыкновенно в качестве новых коэффициентов большие числа, что опять затрудняет использование ряда (1).

В этой заметке я хочу дать удобное в практическом отношении правило для вычисления суммы n членов ряда (1). Прежде всего, как показано Уиттекером, представлю сумму членов этого ряда в другом виде:

$$\begin{aligned} s_2 = v_1 + v_2 &= -\frac{a_0}{a_1} - \frac{a_0^2 a_2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = \frac{-a_0(a_1^2 - a_0 a_2) - a_0^2 a_2}{a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = \\ &= -a_0 \frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = -a_0 \frac{u_1}{u_2}, \end{aligned}$$

$$s_3 = v_1 + v_2 + v_3 = -a_0 \frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}} - a_0^3 \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{aligned} &= -a_0 \left[\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} + a_0^2 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

Но, по теореме о минорах Якоби, выражение, заключенное в квадратные скобки, равно $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}^2$; поэтому

$$s_3 = -a_0 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = -a_0 \frac{u_2}{u_3}.$$

Аналогично получим

$$s_4 = -a_0 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = -a_0 \frac{u_3}{u_4},$$

и, вообще,

$$s_n = -a_0 \frac{u_{n-1}}{u_n}, \quad (2)$$

где

$$u_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Если эту формулу (2) преобразовать к такому виду:

$$s_n = -\frac{\frac{1}{a_0^{n-1}} u_{n-1}}{\frac{1}{a_0^n} u_n} = \frac{P_{n-1}}{P_n},$$

то это будет та самая исходная формула, из которой Уиттекер переходит обратно к его ряду (1).

Здесь P_n обозначает однородную сумму измерения n от степеней и произведений обратных значений корней данного уравнения (подробнее об этом смотри: Э. Уиттекер и Г. Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ 1933 г., стр. 114—117). Однако для больших n вычисление определителей u_n (2) обычным путем весьма затруднительно и, главное, легко можно сделать ошибку при подсчете.

Предлагаю поэтому следующую схему для вычисления определителя u_n :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 \dots a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-3} & a_{n-2} \\ 0 & a_0 \dots a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots a_0 & a_1 \end{vmatrix} - \\
 &- a_0 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-2} & a_n \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-3} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 \dots a_{n-4} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 u_{n-1} - a_0 a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-4} & a_{n-3} \\ 0 & 0 \dots a_{n-5} & a_{n-4} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots a_0 & a_1 \end{vmatrix} + \\
 &+ a_0^2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-3} & a_n \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-4} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 \dots a_{n-5} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots a_0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 u_{n-1} - a_0 a_2 u_{n-2} + \\
 &+ a_0^2 a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-4} & a_{n-3} \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-5} & a_{n-4} \\ 0 & a_0 \dots a_{n-6} & a_{n-5} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots a_0 & a_1 \end{vmatrix} - a_0^3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \dots a_{n-4} & a_n \\ a_0 & a_1 \dots a_{n-5} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 \dots a_{n-6} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot \dots \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \dots a_0 & a_4 \end{vmatrix} = \\
 &= a_1 u_{n-1} - a_0 a_2 u_{n-2} + a_0^2 a_3 u_{n-3} - \dots
 \end{aligned}$$

Продолжая процесс дальше, мы получим:

$$u_n = a_1 u_{n-1} - a_0 a_2 u_{n-2} + a_0^2 a_3 u_{n-3} - \dots + (-1)^n a_0^{n-1} a_n u_0,$$

где $u_0 = 1$.

Обозначая $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_0 a_2$, $b_3 = a_0^2 a_3$, ..., $b_n = (-1)^{n-1} a_0^{n-1} a_n$, получаем последовательно:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= b_1, \\
 u_2 &= b_1 u_1 + b_2, \\
 u_3 &= b_1 u_2 + b_2 u_1 + b_3, \\
 u_4 &= b_1 u_3 + b_2 u_2 + b_3 u_1 + b_4, \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Отсюда можно построить следующую простую схему для вычисления u_n . Строим ряд вертикальных граф; сверху пишем коэффициенты b_1, b_2, b_3, \dots . Справа сперва пишем $u_1 = b_1 = a_1$ и умножаем его на все числа верхней строки. Складывая по первой диагонали, получаем справа $u_2 = b_1 u_1 + b_2$. Полученное затем u_2 умножаем на все числа верхней графы и, складывая по второй диагонали, получаем $u_3 = b_1 u_2 + b_2 u_1 + b_3$ и т. д.

Имеем, следовательно, такую схему:

	b_1	b_2	b_3	b_4
$u_1 = b_1$	$b_1 u_1$	$b_2 u_1$	$b_3 u_1$	$b_4 u_1$
$u_2 = b_1 u_1 + b_2$	$b_1 u_2$	$b_2 u_2$	$b_3 u_2$	$b_4 u_2$
$u_3 = b_1 u_2 + b_2 u_1 + b_3$	$b_1 u_3$	$b_2 u_3$	$b_3 u_3$	$b_4 u_3$
$u_4 = b_1 u_3 + b_2 u_2 + b_3 u_1 + b_4$	$b_1 u_4$	$b_2 u_4$	$b_3 u_4$	$b_4 u_4$

Таким образом вычисление определителя u_n сводится к двум основным арифметическим операциям: умножению u_k на числа, написанные сверху (что хорошо сделать с помощью арифмометра или логарифмической линейки), и сложению по диагонали (что хорошо сделать на счетах). Корень же уравнения, наименьший по абсолютному значению, определяется так:

1-е приближение $x_1 = -a_0 \frac{u_1}{u_2}$, что дает сумму 2-х членов ряда (1)

2-е " $x_2 = -a_0 \frac{u_2}{u_3}$, " " " 3-х " " "

3-е " $x_3 = -a_0 \frac{u_3}{u_4}$, " " " 4-х " " "

.....

n-е " $x_n = -a_0 \frac{u_n}{u_{n+1}}$, " " " (n+1) " " "

Примеры:

1) $10x^2 - 9x - 1 = 0$.

	- 9	10
$u_1 = -9$	81	- 90
$u_2 = 91$	- 819	910
$u_3 = -909$	8181	
$u_4 = 9091$		

$$x = -(-1) \cdot \frac{(-909)}{9091} = -\frac{909}{9091} \approx -0,09999 \approx -0,1.$$

2) $x^3 - 4x^2 - 321x + 20 = 0$.

	- 321	80	400
$u_1 = - 321$	103041	- 25680	
$u_2 = 103121$	- 33101841		
$u_3 = -33127121$			

$$x = -20 \frac{103121}{-33127121} = 0,062258.$$

3) $x^3 - 3x + 1 = 0$.

	- 3	0	1
$u_1 = - 3$	9	0	- 3
$u_2 = 9$	- 27	0	9
$u_3 = - 26$	78	0	- 26
$u_4 = 75$	- 225	0	
$u_5 = - 216$	648		
$u_6 = 622$	0		

Здесь 1-е приближение $x_1 = \frac{3}{9} = 0,3333$ — сумма 2 членов ряда

„ 2-е „ $x_2 = \frac{9}{26} = 0,3425$ „ 3 „ „

„ 3-е „ $x_3 = \frac{26}{75} = 0,3465$ „ 4 „ „

„ 4-е „ $x_4 = \frac{75}{216} = 0,3470$ „ 5 „ „

„ 5-е „ $x_5 = \frac{216}{622} = 0,3473$ „ 6 „ „

$$4) x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = 0.$$

	- 19	40	400
$u_1 = -19$	361	- 760	- 7600
$u_2 = 401$	- 7619	16040	160400
$u_3 = -7259$	137921	- 291360	- 2913600
$u_4 = 146361$	- 2780859	5854440	
$u_5 = -2911219$	55324561		
$u_6 = 58265401$			

$$\text{Здесь } x_1 = \frac{20 \cdot 19}{401} = 0,949,$$

$$x_2 = \frac{20 \cdot 401}{7259} = 1,105,$$

$$x_3 = \frac{20 \cdot 7259}{146361} = 0,992,$$

$$x_4 = \frac{20 \cdot 146361}{2911819} = 1,005,$$

$$x_5 = \frac{20 \cdot 2911819}{58265401} = 0,9995.$$

Точное решение: $x = 1$.

Дополнительные замечания:

I. Возникает вопрос, до какого u_n следует вычислять. На это можно ответить, что нахождение предельного n зависит:

а) от отношений между корнями данного уравнения; при корнях, близких по модулю, приходится брать n большим;

б) от того, с каким числом верных знаков желаем мы получить корни. На практике следует останавливаться тогда, когда три последующих u_k, u_{k+1}, u_{k+2} образуют геометрическую прогрессию, т. е. когда $u_k u_{k+2} = u_{k+1}^2$. Так, в примере 3: $u_4 u_6 = 75 \cdot 622 = 46\,650$, $u_5^2 = 216^2 = 46\,656$, так что $u_4 u_6 \approx u_5^2$, и, значит, достаточно было остановиться на u_6 .

II. Если ряд (1) медленно сходится, что сейчас же заметно по первым u_n , то применяем предварительное преобразование данного уравнения или по способу квадратного корня или по способу Горнера.

Пример 5. Уравнение $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

	4	- 3	0	1
4	16	- 12	0	4
13	52	- 39	0	13
40	160	- 120	0	40
122	488	- 366	0	122
372	1488	- 1116	0	
1135	4540	- 3405		
3464	13856			
10573				

$$\text{откуда } x_1 = \frac{4}{13} = 0,3078,$$

$$x_2 = \frac{13}{40} = 0,3245,$$

$$x_3 = \frac{40}{122} = 0,3280,$$

$$x_4 = \frac{122}{372} = 0,3280,$$

$$x_5 = \frac{372}{1135} = 0,3280,$$

$$x_6 = \frac{1135}{3464} = 0,3278,$$

$$x_7 = \frac{3464}{10573} = 0,3276.$$

Результат получился бы быстрее, если преобразовать предварительно данное уравнение в уравнение, корни которого равняются квадратам корней данного. В данном случае таким уравнением будет:

$$y^4 + 6y^3 + 7y^2 + 10y + 1 = 0.$$

Решаем последнее.

	10	- 7	6	- 1
10	100	- 70	60	- 10
93	930	- 651	558	
866	8660	- 6062		
8068	80680			
75166				

$$\text{Здесь } y_4 = \frac{8068}{75166} = 0,10733;$$

$$x = \sqrt{0,10733} = 0,3276.$$

III. Решение уравнений по способу Уиттекера упрощается, если $a_0 = 1$; к такому случаю можно легко привести всякое уравнение с $a_n = 1$, полагая $x = \frac{1}{y}$, но при этом мы ищем корень с наибольшим модулем. В некоторых случаях коэффициент a_0 можно уменьшить. Так, если $a_0 = a_0 q^2$, а $a_1 = a_1 q$, то все члены уравнения можно разделить на q ; если $a_0 = a_0 q^2$, $a_1 = a_1 q^2$ и $a_2 = a_2 q$, то все члены уравнения можно разделить на q^2 .

6. Пример: $2x^3 - 5x^2 + 10x - 4 = 0$; здесь следует разделить на 2.
Получим $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x - 2 = 0$.

	5	-5	4
5	25	-25	20
20	100	-100	80
79	395	-395	316
315	1575	-1575	1260
1260	6300	-6300	
5041	25205		
20165			

$$\text{Здесь } x_1 = \frac{2 \cdot 5}{20} = 0,5,$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot 20}{79} = 0,506,$$

$$x_3 = \frac{2 \cdot 79}{315} = 0,502,$$

$$x_4 = \frac{2 \cdot 315}{1260} = 0,500,$$

$$x_5 = \frac{2 \cdot 1260}{5041} = 0,499,$$

$$x_6 = \frac{2 \cdot 504}{20165} = 0,500.$$

IV. Кубическое уравнение.

Рассмотрим влияние разных корней кубического уравнения на характер ряда Уиттекера.

Предварительно заметим, что

$$a_0 \cdot \frac{u_1}{u_2} = \frac{P_1}{P_2} = x_1 \cdot \frac{1 + \sigma_1}{1 + \sigma_1 + \sigma_2},$$

$$a_0 \cdot \frac{u_2}{u_3} = \frac{P_2}{P_3} = x_1 \cdot \frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3},$$

и т. д., где

$$\sigma_1 = a + \beta,$$

$$\sigma_2 = a^2 + \beta^2 + a\beta,$$

$$\sigma_3 = a^3 + \beta^3 + a^2\beta + a\beta^2,$$

$$\sigma_4 = a^4 + \beta^4 + a^3\beta + a\beta^3 + a^2\beta^2,$$

и

$$a = \frac{x_1}{x_2}, \quad \beta = \frac{x_1}{x_3}$$

и т. д.

Пусть $|x_1| < |x_2| < |x_3|$. Здесь три случая:

I случай. Корни действительные, и два меньших по модулю корни имеют одинаковые знаки. Тогда $a > 0$, $\beta \geq 0$. Но $|a| > |\beta|$ и поэтому $a + \beta > 0$ и:

$$\sigma_1 > 0;$$

$$\sigma_2 > 0, \quad \text{ибо } a^2 + \beta^2 > a\beta;$$

$$\sigma_3 > 0, \quad \text{„ } \sigma_3 = a^2(a + \beta) + \beta^2(a + \beta) = (a + \beta)(a^2 + \beta^2);$$

$$\sigma_4 > 0, \quad \text{„ } \sigma_4 = (a + \beta)^2(a^2 - a\beta + \beta^2) + a^2\beta^2,$$

и тогда

$$\frac{1 + \sigma_1}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} > \frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3},$$

т. е. ряд будет знакопостоянный $x_1 > \frac{P_{n-1}}{P_n}$; каждый член ряда увеличивает предыдущий результат.

Указанный случай имеется в примере 3.

II случай. Корни кубического уравнения действительные, и 2 меньших по модулю корня имеют разные знаки.

Имеем: $\alpha < 0$, $\beta \geq 0$, но $\alpha + \beta < 0$, и $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$, $\sigma_4 > 0$.

Ряд — знакопеременный с правильным чередованием знаков, т. е.

$$x_1 > \frac{P_{n-1}}{P_n}, \quad x_2 < \frac{P_n}{P_{n+1}}.$$

При суммировании ряда будут получаться результаты то меньше, то больше истинного значения корня и суммы будут приближаться к последнему, как к пределу.

Этот случай мы имеем в примере 4.

III случай. Корни комплексные.

Здесь $x_2 = re^{i\varphi}$, $x_3 = re^{-i\varphi}$;

$$\alpha = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1}{re^{i\varphi}} = \frac{x_1}{r} e^{-i\varphi}, \quad \beta = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1}{re^{-i\varphi}} = \frac{x_1}{r} e^{i\varphi}.$$

Тогда

$$\sigma_1 = \alpha + \beta = \frac{x_1}{r} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{x_1}{r} 2 \cos \varphi,$$

$$\sigma_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta = \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 (e^{-2i\varphi} + e^{2i\varphi} + 1) = \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 (1 + 2 \cos 2\varphi),$$

$$\sigma_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \left(\frac{x_1}{r}\right)^3 (2 \cos \varphi + 2 \cos^3 \varphi),$$

$$\sigma_4 = \left(\frac{x_1}{r}\right)^4 (1 + 2 \cos 2\varphi + 2 \cos 4\varphi),$$

.....

Здесь знаки σ благодаря косинусам могут получаться разные, но с неправильным чередованием. Отсюда и ряд (1) знакопеременный с неправильным чередованием знаков, и при суммировании будут получаться результаты то меньшие, то большие истинного значения корня, но не чередуясь, как это имеет место в случае 2; это и будет являться признаком комплексных корней. Этот случай мы имеем в примере 6.

Если же меньший по модулю корень комплексный, то выгодно преобразовать уравнение подстановкой $x = \frac{1}{y}$ и искать больший по модулю корень. Вообще необходимо отметить, что случай III дает наихудший результат при способе Уиттекера, особенно, если модули комплексных корней и действительного приблизительно равны. Сходные результаты получаются и при уравнениях более высоких степеней.

155. В тетраэдре $ABCD$ трехгранный угол D — прямой. Доказать, что между квадратами шести его ребер существует соотношение:

$$AB^2 \cdot BC^2 \cdot CA^2 = AB^2 \cdot AD^2 \cdot BD^2 + BC^2 \cdot BD^2 \cdot CD^2 + CA^2 \cdot CD^2 \cdot AD^2 + 2 \cdot AD^2 \cdot BD^2 \cdot CD^2.$$

Н. А. Колмогоров (Киров).

156. Доказать, что уравнение пятой степени вида

$$x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + c = 0$$

решается в радикалах; вывести формулу для его решения.

Н. А. Колмогоров (Киров).

157. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}$$

(В числителе и знаменателе по n радикалов.)

А. Доморяд (Ташкент).

158. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n^3.$$

Зморович.

159. Доказать, что

$$1) \ m - \frac{2m(m-1)}{2!} + \frac{2^2m(m-1)(m-2)}{3!} - \frac{2^3m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} + \dots = \begin{cases} 1 & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

$$2) \ 1 - \frac{2m}{2!} + \frac{2^2m(m-1)}{3!} - \frac{2^3m(m-1)(m-2)}{4!} + \dots = \begin{cases} 0 & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ \frac{1}{m+1} & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

$$3) \ \frac{m}{1} - \frac{2m(m-1)}{2! \cdot 2} + \frac{2^2m(m-1)(m-2)}{3! \cdot 3} - \frac{2^3m(m-1)(m-2)(m-3)}{4! \cdot 4} + \dots = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{m} & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{m-1} & \text{при } m \text{ чет.} \end{cases}$$

Б. А. Оксенов (Ленинград).

160. Доказать тождество

$$C_k^2 + C_{C_k}^2 = C_{C_k+1}^2.$$

(C_n^2 — число сочетаний из n элементов по 2).

В. Голубев (Каменка).

161. Пусть a_1, a_2, a_3, \dots произвольная последовательность положительных чисел, не превышающих некоторое число M . Доказать сходимость последовательности

$$\sqrt{a_1}, \quad \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}, \quad \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}}, \quad \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \sqrt{a_4}}}}, \dots$$

и оценить величину ее предела.

П. И. Романовский (Москва).

ЗАДАЧИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

17. Доказать, что если в четырехугольник можно вписать окружность и в то же время около четырехугольника можно описать окружность, то площадь четырехугольника равна квадратному корню из произведения его сторон.

Ф. Саблуков, ученик 9 класса 114 средней школы Советского района (г. Москва).

18. Решить уравнение

$$32x^4 + 12\sqrt{2}x^3 - 2x^2 - 1 = 0.$$

В. Щельванов, ученик 10 класса средней школы им. Бубнова (г. Чебоксары).

Задачи, предлагавшиеся на первом туре Московской математической олимпиады школьников в 1937 г.

19. Два противоположных ребра тетраэдра лежат на двух непересекающихся прямых a и b . Показать, что если эти ребра будут скользить, сохраняя свою длину, по прямым a и b , то объем тетраэдра не меняется.

20. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3. \end{aligned}$$

27. На плоскости дана прямая, и по одну сторону от нее две точки. Найти на прямой точку, сумма расстояний от которой до двух данных точек равна данной величине d .

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

122. Найти два треугольных числа, полусумма которых есть опять треугольное число.

Если

$$x = \frac{a(a+1)}{2}, \quad y = \frac{b(b+1)}{2}, \quad z = \frac{c(c+1)}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+y}{2} = z,$$

где a, b, c — целые числа, то

$$a^2 + a + b^2 + b = 2c^2 + 2c,$$

ИЛИ

$$(1 + a + b)^2 + (b - a)^2 = (2c + 1)^2.$$

По известным формулам пифагоровых чисел либо

$$1 + a + b = m^2 - n^2, \quad b - a = 2mn, \quad 2c + 1 = m^2 + n^2,$$

либо

$$1 + a + b = 2mn, \quad b - a = m^2 - n^2, \quad 2c + 1 = m^2 + n^2,$$

причем одно из чисел m, n четно, другое — нечетно.

В первом случае

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{m^2 - 2mn - n^2 - 1}{2}, \\ b &= \frac{m^2 - n^2 + 2mn - 1}{2}, \\ c &= \frac{m^2 + n^2 - 1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Во втором случае

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{n^2 + 2mn - m^2 - 1}{2}, \\ b &= \frac{m^2 + 2mn - n^2 - 1}{2}, \\ c &= \frac{m^2 + n^2 - 1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решение, несколько отличающееся от изложенного, прислал А. С. Лейбин (Харьков). Неполное решение прислал Г. Гандельман (Днепропетровск).

123. Прямой трехгранный угол $OXYZ$ пересечен плоскостью. В сечении образовался треугольник ABC . Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = OA^2 : OB^2 : OC^2,$$

где A, B, C — углы треугольника ABC .

В треугольнике ABC проведем высоты AD, BE, CF . Тогда

$$\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = \frac{AE}{BE} : \frac{BF}{CF} : \frac{CD}{AD} = \frac{AE \cdot AC}{BE \cdot AC} : \frac{BF \cdot BA}{CF \cdot BA} : \frac{CD \cdot CB}{AD \cdot CB}.$$

Из подобных прямоугольных треугольников AEO и AOC имеем $AE \cdot AC = OA^2$. Аналогично $BF \cdot BA = OB^2$, $CD \cdot CB = OC^2$. Кроме того, $BE \cdot AC = CF \cdot BA = AD \cdot CD = 2\Delta$, где Δ — площадь треугольника ABC . Следовательно,

$$\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = \frac{OA^2}{2\Delta} : \frac{OB^2}{2\Delta} : \frac{OC^2}{2\Delta} = OA^2 : OB^2 : OC^2,$$

что и требовалось доказать.

Г. Гандельман (Днепропетровск), С. Х. Ковтун (с. Шура), Г. А. Горб (г. Красный Луч), Т. А. Мошнин (Уразово), М. М. Фельдман (Харьков), С. И. Городов (Ленинград), И. Огиевецкий (Днепропетровск).

124. Решить уравнение

$$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72 = 0.$$

Левая часть уравнения разлагается на три множителя второй степени:

$$(x^2 - 3x + 6)(x^2 - 2x + 6)(x^2 - x + 2) = 0.$$

Отсюда нетрудно получить корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{15}}{2}; \quad x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{5}; \quad x_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

С. И. Городов (Ленинград), Г. Гандельман (Днепропетровск).

— 126. Три источника света силой в 2, 4 и 5 единиц расположены в точках плоскости с координатами (0; 3), (4; 5) и (9; 0). Найти в этой плоскости точку, одинаково освещенную всеми тремя источниками.

Пусть x, y — координаты искомой точки. По известному закону оптики будем иметь:

$$\frac{2}{x^2 + (y-3)^2} = \frac{4}{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \frac{5}{(x-9)^2 + y^2}.$$

Решая эту систему уравнений, найдем, что искомая точка может занимать два положения: (2; -1) и (-6; -5).

Г. Гандельман (Днепропетровск), С. И. Городов (Ленинград).

— 128. Решить систему уравнений

$$x + y = a, \quad x^5 + y^5 = b.$$

Второе из этих уравнений можно переписать так:

$$(x + y)^5 - 5xy(x + y)^3 + 5x^2y^2(x + y) = b^5;$$

с помощью первого уравнения оно принимает вид:

$$5a(xy)^2 - 5a^3(xy) + a^5 - b^5 = 0.$$

Решая это квадратное относительно xy уравнение, получаем

$$xy = \frac{5a^3 \pm \sqrt{5a^6 + 20ab^5}}{10a} = \frac{5a^3 \pm \sqrt{5a(a^5 + 4b^5)}}{10a}.$$

Следовательно, x и y являются корнями квадратного уравнения

$$z^2 - az + \frac{5a^3 \pm \sqrt{5a(a^5 + 4b^5)}}{10a} = 0.$$

Его корни равны

$$z = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-5a^3 \mp 2\sqrt{5a(a^5 + 4b^5)}}{20a}}.$$

Беря различные знаки перед радикалами, получим четыре решения системы уравнений.

Г. И. Бобылев (Бредихино), М. Н. Матузко (Москва), А. Николаенко (Днепропетровск).

129. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

Квадраты чисел вида $3n$, $3n+1$, $3n+2$ имеют соответственно вид $3 \cdot 3n^2 = 3n_1$, $3(3n^2 + 2n) + 1 = 3n_1 + 1$, $3(3n^2 + 4n + 1) + 1 = 3n_1 + 1$. Поэтому сумма квадратов двух целых чисел может быть квадратом только в том случае, если хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

Аналогично, квадраты чисел вида $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ имеют соответственно вид $4 \cdot 4n^2 = 4n_1$, $4(4n^2 + 2n) + 1 = 4n_1 + 1$, $4(4n^2 + 4n + 1) = 4n_1$, $4(4n^2 + 6n + 2) + 1 = 4n_1 + 1$. Поэтому сумма квадратов двух целых чисел может быть квадратом только в том случае, если хотя бы одно из этих чисел делится на 4. Итак, из чисел, выражающих длины катетов, одно делится на 3 и одно на 4. Поэтому их произведение делится на 12.

М. А. Радциг (Ленинград), С. И. Колесник (Харьков), А. Николаенко (Днепропетровск).

П И С Ь М А Ч И Т А Т Е Л Е Й

В связи с помещенной в вып. 10 „Математического просвещения“ статьей А. Я. Граусмана „Квадрат Эйлера“, полагаю, что читателям этого сборника будет не безынтересно ознакомиться со следующим общим (и повидимому — единственным) решением другого „квадрата“ — именно девятиклеточного „квадрата индусов“, обладающего тем свойством, что суммы поставленных в клетках чисел, взятых по любой горизонтальной или вертикальной строке, а также по диагоналям квадрата, составляют одно и то же число $N = 3(b + c - a)$

$2b + c - 2a$	a	$2c + b - 2a$
$2c - a$	$b + c - a$	$2b - a$
b	$2b + 2c - 3a$	c

При $a = 1, b = 2, c = 4$ получаем, как частный случай, общеизвестный „квадрат индусов“, содержащий в клетках целые числа от 1 до 9.

Б. А. Оксенов (Ленинград).

По поводу задачи № 75 („М. П.“ № 8, стр. 68) следует все же заметить, рассматривая задачу не с комбинаторной, а с практической точки зрения, что достаточно шести одинаковых замков и одиннадцати одинаковых ключей к ним при весьма легко осуществляемом условии, что ключ может быть вынут только из закрытого замка. При этом, естественно, предполагается, что сейф открывается только тогда, когда все шесть замков открыты. Быть может, для читателей сопоставление чисел 2772 и 252 с числами 11 и 1 будет не безынтересно.

Поскольку условие задачи предполагает недоверие к членам комиссии и ничего не упоминает об устройстве замков, можно, опасаясь подделок ключей со стороны членов комиссии при шести одинаковых замках, устроить 11 различных замков с разными ключами так, чтобы сейф открывался тогда и только тогда, когда открыты какие угодно 6 из них. Это простая техническая задача. В принципе можно представить себе 11 кубиков по вертикали: засов свободен, если какие-либо 6 из них сняты, а остальные сжаты в колонну из пяти кубиков.

Во всяком случае, без оговорок относительно устройства замков задача остается неопределенной. В таких случаях вообще необходимо определять аксиоматически, что понимается под терминами „замок“, „ключ“, „можно открыть“, „нельзя открыть“, и т. д., ибо при обычном конкретном истолковании этих слов всегда остается простор для конкретных способов решения и задача лежит еще вне той области, где можно действовать логикой и вычислением.

И. В. Арнольд (Москва).

В решении задачи № 50 („М. П.“ № 6, стр. 102) допущена ошибка. Вторую половину решения следует читать так: Но искомая сфера должна проходить через начало координат; следовательно, свободный член в уравнении (1) должен быть равен нулю:

$$\lambda D + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{R^2 - a^2 - b^2 - c^2}{D};$$

и уравнение (1) принимает вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 + \frac{R^2}{D} (Ax + By + Cz + D) = 0,$$

или

$$D[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2] + R^2(Ax + By + Cz + D) = 0.$$

Д а в ы д о в (Киев).

В „М. П.“ № 9 под № 134 была помещена задача: Отрезок AB разбивается двумя произвольно взятыми внутри отрезка точками M и N на три части; определить вероятность того, что из трех полученных частей можно построить треугольник.

Решение этой задачи имеется у Маркова в классическом курсе теории вероятностей (изд. 1913 г., стр. 187).

Д а в ы д о в (Киев).
Аналогичное сообщение прислал Г. Т р е в о г и н (Москва).

Помещенная в № 10 Сборника „Математическое просвещение“ теорема И. И. Трифонова „Об одном свойстве тетраэдра“ совсем просто доказывается векторным путем.

Пусть $OABC$ — тетраэдр, заданный радиусами-векторами своих ребер

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Удвоенный вектор площади (грани) ABC равен векторному произведению векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{S}_4 &= [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = [(\mathbf{b} - \mathbf{a}), (\mathbf{c} - \mathbf{a})] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - [\mathbf{b}, \mathbf{a}] = \\ &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] = 2\mathbf{S}_1 + 2\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{S}_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3. \quad (1)$$

Векторы: \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 и \mathbf{S}_3 направлены от внешней стороны соответственной грани к ее внутренней стороне, а вектор \mathbf{S}_4 — от внутренней стороны грани ABC к ее внешней стороне. Возведем в квадрат обе части равенства (1):

$$\mathbf{S}_4^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + \mathbf{S}_3^2 + 2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 + 2\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3 + 2\mathbf{S}_3\mathbf{S}_1. \quad (2)$$

Угол между векторами двух граней, направленными внутрь двугранного угла, образуемого этими гранями, дополняет до 180° линейный угол двугранного угла. Поэтому

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = S_1S_2 \cos(\pi - M_3) = -S_1S_2 \cos M_3,$$

и т. д. Равенство (2), освобожденное от векторных обозначений, и выражает доказываемую теорему:

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2 \cos M_3 - 2S_2S_3 \cos M_1 - 2S_3S_1 \cos M_2.$$

Г. К. Б р у с и л о в с к и й (Москва).
Аналогичное сообщение прислал Ч. И б р а г и м о в (Баку).

Предлагаю более простое доказательство теоремы, помещенной в статье И. И. Трифонова „Об одном свойстве тетраэдра“.

Обозначим площади граней тетраэдра через A , B , C и D ; косинус двугранного угла между гранями A и D через $\cos AD$ и т. д.

Проекция грани A на плоскость грани D будет равна: $A \cos AD$, и аналогично для других граней. Очевидно, площадь D равна сумме площадей проекций граней A , B и C на плоскость грани D , т. е.

$$D = A \cos AD + B \cos BD + C \cos CD.$$

Умножая это равенство на D , получим

$$D^2 = AD \cos AD + BD \cos BD + CD \cos CD.$$

Применяя те же рассуждения, получим аналогично и для граней A , B и C

$$A^2 = BA \cos BA + CA \cos CA + DA \cos DA,$$

$$B^2 = CB \cos CB + DB \cos DB + AB \cos AB,$$

$$C^2 = DC \cos DC + AC \cos AC + BC \cos BC,$$

или

$$A^2 - BA \cos BA - CA \cos CA = DA \cos DA,$$

$$B^2 - CB \cos CB - AB \cos AB = DB \cos DB,$$

$$C^2 - AC \cos AC - BC \cos BC = DC \cos DC.$$

Складывая левые и правые стороны последних трех равенств, получим:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 - 2AB \cos AB - 2BC \cos BC - 2CA \cos CA = \\ = DA \cos DA + DB \cos DB + DC \cos DC = D^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

К. Е. Гомеров (Ташкент)

Я занимаюсь повышением своей квалификации по высшей математике (сейчас изучаю дифференциальные уравнения).

Хотел бы завязать переписку с товарищами, ведущими такую же работу.

Иван Яковлевич Чекалин. Тула, Толстовская застава, дом ТОЗа, корпус № 1, кв. 14.

Желаю переписываться по вопросам математики. Я окончил школу десятилетку и предполагаю поступать в университет.

Валерьян Щелыванов, г. Чебоксары (Чувашская АССР), Ленинградская улица, средняя школа им. А. С. Бубнова.

ТЕКУЩАЯ ЖИЗНЬ

КОНФЕРЕНЦИЯ ПЕДВУЗОВ

С 6 по 9 февраля 1937 г. в г. Кирове происходила научно-методическая конференция математических кафедр педагогических институтов (Вологда, Горький, Киров, Омск, Пермь, Свердловск, Тюмень). Участники конференции, проф. В. М. Шепелев, проф. А. В. Ланков, доц. В. И. Русанов, доц. Э. К. Хилькевич, доц. Д. К. Селезнев, доц. С. М. Клименко, доц. Козлов сделали ряд докладов научного и педагогического характера. В прениях по докладу проф. А. В. Ланкова (Логическая структура учебника элементарной геометрии) доц. Э. К. Хилькевич сообщил имеющиеся у него сведения об итогах просмотра стабильных учебников в Математическом Институте им. Стеклова Академии наук СССР, в Математическом Комитете Наркомпроса и Московском Математическом обществе. Отрицательная оценка стабильного учебника Гурвица и Гангнуса этими организациями произвела сильное и отрадное впечатление на участников конференции и была всецело поддержана конференцией.

Х;

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК 7-х КЛАССОВ

С февраля месяца среди учеников 7-х классов 447-й школы ТОНО (Москва) организован математический кружок.

Ограниченный запас знаний и возраст членов кружка заставляют строить работу кружка на материале главным образом развлекательного характера. Тщательно избегаются задачи, построенные на двусмыслии, игре слов и т. п. Но выбор математически доброкачественного материала и в то же время доступного и интересного юным кружковцам очень затруднителен из-за отсутствия литературы. В кружке использовались сборники „Математическое просвещение“ (задачи), Радемахер и Теплиц „Числа и фигуры“, Литцман „Теорема Пифагора“, „Великаны и карлики в мире чисел“ и хорошо известные школьникам книги Перельмана.

Последние, однако, мало удовлетворяют школьников со склонностью к математике, на что, впрочем, не претендует и сам автор, указывая в одном из предисловий на предназначение своей книги „... главным образом не для тех, у кого есть склонность к математике“ (Перельман, „Занимательная геометрия“, ОНТИ, 1936 г.).

Наиболее активны среди юных кружковцев Ева Цалькович, Алеша Литман и Аркадий Скоморошкин.

Т.

От редакции: Редакция просит руководителей школьных математических кружков давать на страницах сборников информацию о работе кружков.

Журналы „Высшая техническая школа“ и „Высшая школа“ в своих номерах за 1935 г. и 1936 г. осветили работу профессорско-преподавательского состава вузов и втузов по вопросам преподавания математики в средней школе в период от весны 1934 г. до лета 1936 г.; этот период включает три приемных испытания 1934, 1935, 1936 г., два учебных года 1934/1935 и 1935/1936 гг. В этот период происходили школьные математические олимпиады (с 1934 г. в Ленинграде, с 1935 г. в других городах), систематическое посещение научными работниками школьных занятий, ряд совещаний с преподавателями средней школы и т. д. В результате уже в 1935 г. в Наркомпросе накопился ценнейший материал, дающий исчерпывающую критику программ, учебников и методов преподавания математики, а также целый план продуманных конкретных мероприятий по улучшению преподавания математики. К сожалению, все это пропало в дебрях Наркомпроса.

1. ВЕСНА — ЛЕТО 1934 г.

Приемные испытания в вузы в 1934 г. показали, что математика дает наилучшие показатели успеваемости.

Например, таблица результатов приемных испытаний в Менделеевский институт для лиц, окончивших среднюю школу, дает ¹⁾ (надо иметь в виду еще сравнительно невысокие требования в 1934 г.)

	Отлично %	Хорошо %	Удовлетворительно %	Неудовлетворительно %
по математике	1,7	10,3	50,9	37,5
„ физике	5,5	25,5	51,3	17,7
„ химии	5,7	40,9	40,9	12,5
„ русскому яз. и литературе	9,8	25,7	50,7	13,8
„ обществоведению	11,5	16,9	47,2	14,4

Цифры разных оценок, вообще варьируют (в частности, в зависимости от уровня требований). Но данные Менделеевского института типичны и для приемных испытаний 1935 и 1936 гг., — последние два места всегда занимают физика и математика. Отсюда естественно, что именно математики особенно остро реагировали на положение в средней школе.

Уже весной 1934 г. ленинградские математики для ознакомления с положением в школе подготовили и провели математическую олимпиаду школьников выпускных классов. Известный геометр и педагог проф. Житомирский пишет ²⁾: „Интерес к олимпиаде среди учащихся был значительный: задачи дискутировались в ученической среде, лекции привлекли сотни слушателей. Каждый класс выделил двух-трех учеников, конечно, лучших. И все же результаты оказались весьма скромными.“

В результате двух последовательных туров олимпиады выделились лишь два-три десятка школьников, проявивших умение решать мало-мальски сложные задачи, и всего около сотни овладевших навыками и способами к простейшему комбинированию их“.

¹⁾ ВТШ, 1935, № 7, стр. 53—54.

²⁾ ВТШ, 1936, № 2 стр. 28.

II 1934/1935 УЧЕБНЫЙ ГОД.

Этот год был годом максимальной активности математической общественности, встревоженной результатами приемных испытаний и олимпиады. Среди научных работников были распространены в ту пору надежды, что Наркомпрос заинтересуется материалами и предложениями научных работников и предпримет кое-что для исправления существующего положения.

Особенную активность проявили на этот раз ленинградские математики. Под руководством проф. Фихтенгольца и проф. Тартаковского была организована бригада, куда вошли лучшие силы ленинградской математики: профессор Мюнц, Житомирский, Смирнов, Канторович и ряд других. Весь учебный 1934/1935 г. члены бригады посещали занятия в средней и начальной школе, тщательно изучили учебники, программы и методические установки Наркомпроса, провели ряд совещаний с преподавателями средней школы. В результате этой работы появилась их обширная докладная записка в Наркомпрос, содержащая детальную и глубокую критику системы преподавания и продуманный комплекс мероприятий по улучшению положения дел в школе. К сожалению, этот ценнейший документ похоронен в Наркомпросе. Краткое его изложение приводится в ВТШ за 1936 г., № 5, стр. 132—134.

Приведем отдельные выдержки:

„Печальной особенностью преподавания арифметики является полное отсутствие настоящих задач“.

„Отсутствие задач проходит красной нитью через весь курс математики. Из курса математики исключается все, что может развивать в детях сообразительность и догадку, инициативу, способность к ассоциативному мышлению. Царствует шаблон“.

„Преподавание теории, как правило, имеет характер догматического изложения, в то время как мыслящему ребенку или подростку длительно следовать за чужими рассуждениями крайне утомительно. Изучение математической теории подменяется заучиванием на память доказательств математических теорем“.

Ленинградские математики подвергают суровому осуждению программы, (особенно по арифметике) и некоторые стабильные учебники Наркомпроса. Категорически осуждает бригада учебники геометрии Гангнуса и Гурвица, учебник арифметики Попова и задачник Березанской.

„Программы по геометрии, алгебре и тригонометрии, в общем более удовлетворительные, проходятся по таким учебникам, как Гангнус и Гурвиц. По мнению бригады эти учебники совершенно непригодны для систематического курса геометрии“.

В результате отмеченных недостатков — неумение школьников решать задачи, например — составить уравнение, слабое развитие пространственных представлений, поверхностное и формальное усвоение и отсюда — рецидив безграмотности.

Все это, к сожалению, как увидим из материалов журнала, регулярно подтверждалось на приемных испытаниях. Все это известно и Наркомпросу. Например, представитель НКП на совещании московских работников втузов говорит: „В области математики — учащиеся все еще слабо владеют математическим языком, у них нет еще достаточного умения и навыков в решении задач (составление уравнений, слабые пространственные представления у учащихся), кроме того, скомканы отдельные главы курса“ (ВМШ, № 7, 1935 г., стр. 30). Однако в отличие ленинградских математиков, работники Наркомпроса не анализировали причин этих недостатков, не намечали методов их изжития. Все осталось попрежнему. Трехлетние усилия ленинградских математиков ни к чему не привели.

В Москве тоже создались группы научных работников, связавшихся в 1934/1935 г. со школами, как об этом рассказывает на том же совещании представитель бюро СНР (ВМШ, № 7, 1935 г., стр. 35). На этом совещании представитель Наркомпроса получил объяснение, почему скомканы отдельные главы курса.

Преподавательница 2-й школы РОНО Петровская говорит о неравномерном распределении нагрузки между классами, в результате чего получается перенапряжение на старших классах: „Вместо того, чтобы давать побольше

решать задачи и расширить знание учащихся, мы должны будем „гнать программу“ (там же, стр. 46).

Любопытно выступление проф. Филоненко-Бородина (там же, стр. 42). Он рассказывает, что „два года тому назад (т. е. в 1933 г.) ему пришлось объясняться с заведующим учебной частью 23-й школы Бауманского района о том, что вследствие разрыва между программами математики и физики учащимся приходится встречаться с физическими задачами, которые они не в состоянии решать.“ Заведующий учебной частью объяснил, что „они вот уже два года бьются“ над тем, чтобы устранить эти дефекты программы. „Это было два года тому назад, — заканчивает проф. Филоненко-Бородин, — но положение не изменилось до сего времени“.

Со времени появления статьи проф. Филоненко прошло еще почти два года, и „положение не изменилось“, хотя „бьются над ним“ почти 6 лет! Этот „разительный пример“ (по словам проф. Филоненко) характерен для отношения НКП к указаниям о недостатках в его работе. Поэтому-то ценные материалы и предложения, собранные научными работниками в 1934/1935 г., остаются без движения.

III. ПРИЕМНЫЕ ИСПЫТАНИЯ 1935 г.

Приемные испытания 1935 г. в вузы подтвердили картину, нарисованную математиками.

По МЕНИТСу, например, как указывают Грамп и Бронни в статье „Чему учит прием 1935 г.“ (ВМШ, № 10), при решении письменных работ задачу на составление уравнения решило всего 25%, а стереометрическую задачу — всего 27% решавших. Констатируя некоторое улучшение подготовки школьников, авторы пишут:

„Попрежнему обстоит плохо дело с умением решать задачи на составление уравнений“.

„Попрежнему значительная часть поступающих не обладает достаточно развитым геометрическим воображением“ (стр. 27).

Там же в статье инж. Дудкина: „Средняя школа на проверке“ констатируется: „На письменных работах многие не умеют решать задачи на составление уравнений“.

По Менделеевскому институту сравнительные данные за 1935 г., как и за 1934 г., показывают, что балльность по математике стоит на последнем месте (см. статью доц. Ковша, ВМШ № 11, стр. 41—43); для окончивших среднюю школу она была равна:

По математике	2,24—2,97
„ русск. языку	3,04—3,09 и т. д.
Средний балл	3,22—3,29

„Испытания 1935 г. показали, — пишет Ковша, — что с математикой обстоит особенно плохо. Правда, испытания отсеяли значительное количество плохо подготовленных по математике, но и принятые оставляют желать много лучшего. Зачетная сессия показывает, что математика дает большое количество неудовлетворительных оценок“.

III. 1935/1936 УЧЕБНЫЙ ГОД.

В это время ВТШ и ВШ поместили ряд статей. Очень содержательная статья проф. Житомирского „Математическая подготовка поступающих в вузы“ (ВТШ, 1936 г., № 2), где он, естественно, возвращается к подготовке в средней школе. „Нужно добиться, чтобы математическая подготовка поступающих в вузы была повышена до нормального уровня“ (стр. 27). Автор подчеркивает, что подготовка в школе сводится главным образом к приобретению формальных навыков. Во имя приобретения формальных навыков детей заставляют до третьего класса считать устно. В третьем классе устный счет проводится уже с трехзначными числами и в третьем же классе ученикам впервые показывают правила письменного счета. „Преподавание в младших классах затягивается, оставляя для алгебры, геометрии и тригонометрии недопустимо малый промежуток времени, и все же опыт показывает, что у старшекласников дело обстоит неблагоприятно не только с алгеброй и тригонометрией, но даже с про-

бями". „Самое главное, что задачи, развивающие способность к математическому рассуждению, не решаются совсем. Решаются либо отвлеченные примеры, либо задачи, которые без всякого анализа сводятся к примерам“ (стр. 28—29).

О рецидиве математической безграмотности пишет в ВШ № 2, 1936 г. Бельский в статье: „Математическая безграмотность студентов“, где он приводит многочисленные случаи рецидивов даже арифметической безграмотности, которая обнаружилась во время зимней зачетной сессии 1936 г. Автор видит причину этого в недостатках преподавания, считает необходимым между прочим снабдить учителя хорошей математико-педагогической литературой, чтобы повысить квалификацию учителя, предостерегая при этом: „надо следить, чтобы не было порчи с методической стороны в так называемых „обработках“ и „переделках“ прежних классических руководств для средней школы (что имело, например, место в последних переизданиях алгебраического задачника Шапошникова и Вальцова)“.

После зачетной сессии состоялся ряд совещаний в Москве преподавателей высшей и средней школы для выяснения конкретных причин недостатков работы школы.

В № 4 ВШ дается информация о встрече преподавателей средней школы с работниками вузов в 1 МГУ в марте 1936 г. На этом заседании опять дискутировались вопросы об учебниках, причем острой критике подверглись некоторые математические учебники.

IV. ПРИЕМНЫЕ ИСПЫТАНИЯ 1936 г.

В № 2 „Высшая школа“ помещены статьи директоров ряда вузов о результатах приемных испытаний. В тех статьях, где приведены сравнительные оценки результатов испытаний по разным предметам, математика стоит или на последнем или на предпоследнем месте (уступая последнее место физике).

Особенно тревожным представляются данные директора Моск. Ин-та Хим. Тех. Плоткина: „Из прошедших испытания отметку „неудовлетворительно“ получили 52%, „хорошо“ и „отлично“ — 15%“ (стр. 12—13). В других случаях результаты более благополучны, однако математика по успеваемости выделяется в худшую сторону. Тов. Плоткин приводит случаи, когда „неудовлетворительно“ по математике получали те, кто в школе имел оценки „хорошо“ и „отлично“. Он же отмечает: „нет привычки правильно строить доказательства“ и то же неизбежное: „по математике труднее всего задачи на составление уравнений и по стереометрии“ (стр. 12—13).

Несколько ниже (стр. 19) в материалах Московского Автодорожного Института сообщается об окончивших десятилетку, что они „в массе обладают формальными знаниями — частые случаи неумелого применения теории к практике“.

Сравнивая материалы приемных испытаний разных лет, видим, что они сигнализируют о примерно одних и тех же основных дефектах, на корни которых указывал ряд научных работников.

Мы видим, что журналы ВМШ и ВШ содержат достаточный материал для того, чтобы судить о постановке математики в нашей школе в период 1934—1936 гг. и наметить пути улучшения этого дела. К сожалению, Наркомпрос не обращает внимания на эти материалы ¹⁾.

От редакции: Редакция обращается ко всем школьникам, учителям и преподавателям вузов и вузов с просьбой пересылать ей все материалы, характеризующие постановку преподавания в средней школе.

¹⁾ В № 2 журнала „Высшая школа“ за 1937 г. опубликован полный текст докладов проф. Г. М. Фихтенгольца (Математическая подготовка в средней школе), проф. Л. Г. Шнирельмана (Нужна срочная замена учебников), читанных на декабрьской сессии математической группы Академии наук. Рекомендуем читателям ознакомиться с этими весьма важными докладами.

Б И Б Л И О Г Р А Ф И Я

Р. В. Гангнус и Ю. О. Гурвиц. Геометрия (методическое пособие), под редакцией И. К. Андропова, ч. I, стр. 310, изд. 3, Учпедгиз, 1936 г.; отв. редактор С. Каледский.

Учпедгиз выпустил эту книгу в 60 000 экземпляров. Следовательно, она попадет в руки каждому преподавателю средней и неполной средней школы, рабфака, техникума, будет ряд лет влиять на все преподавание элементарной геометрии. Естественно задать себе вопрос: принесет ли она пользу или вред нашему учительству?

Для того, чтобы методическое пособие принесло пользу преподавателю, оно должно быть составлено продуманно. Нужно тщательно подобрать материал, не „растекаться мыслями по древу“, а останавливаться особенно подробно на наиболее важных и трудных в преподавании местах. Оно должно быть вполне грамотно, не содержать нечетких формулировок и неясных доказательств, чтобы не путать учителя. С этой точки зрения и подойдем к рецензируемой книге.

Первая трудность для преподавателя геометрии заключается в самом ее методе, в ее логической структуре. Данные приемных испытаний показывают, что как раз логическая сторона курса ускользает иногда от учащихся, что они путают предпосылки доказательств с выводами, необходимые условия с достаточными и т. п., и путают потому, что путают порой в тех же самых случаях и их учителя. И вот с этой важнейшей стороны пухлая книга в 310 страниц мало содержательна. Например, вопроса о прямой и обратной теореме (в котором путают не только рядовые учителя, но и авторы стабильных учебников) авторы касаются вскользь в параграфе, посвященном задачам на построение. Скомкан и вопрос о необходимых и достаточных условиях, к тому же проиллюстрированный неинтересными примерами. Скомкан и вопрос о математической индукции, которому посвящено несколько строк (или совсем не надо было касаться этого вопроса или, если уж касаться, то изложить его толково). Авторы хотят разъяснить логические принципы классификации, отношение видового к родовому, но при проведении классификации отдельных фигур нарушают сами эти принципы (квадрат фигурирует то как частный случай ромба и прямоугольника, то противопоставляется им; равносторонний треугольник — то частный случай равнобедренного, то самостоятельный, равноправный с равнобедренным элемент классификации треугольников (стр. 112). Авторы говорят: „понятие о геометрическом месте должно быть дано четко“. Сами же определяют его: „Прямая или кривая линия... называется геометрическим местом“ (стр. 176); (кривая у авторов (стр. 40) не должна содержать отрезков прямых). А почти все приведенные авторами примеры геометрических мест (стр. 176, зад. 5, 6, 7) не подходят под это определение, ибо в них фигурирует не „кривая“, и не просто прямые, а другие геометрические образы (пары параллельных прямых, пары пересекающихся прямых, отрезки).

Еще хуже обстоит дело с наиболее основными понятиями геометрии. Здесь мы встречаемся с вещами, напоминающими бред душевнобольных. Приведем для иллюстрации контрольный вопрос (стр. 41): „Какому из двух тел, воле или льду, принадлежит поверхность, отделяющая воду от льда? Какова толщина этой поверхности, ее длина, ширина?“ Что случится, если 60 000 читателей книги начнут задавать подобные вопросы миллионам советских школьников, в предшествующий текст, столь же нелепый, то тогда мы поймем, что в этом бреде есть нечто систематическое: авторы пытаются строить физические модели поверхностей „без толщины“, линий — „без ширины и толщины“. Они не понимают элементарного смысла геометрического абстрагирования, не понимают, что всякая физическая модель и поверхности, и линии, и точки обязательно имеет все 3 измерения!

Вообще контрольные вопросы (в частях книги, посвященных общим понятиям геометрии) производят странное впечатление. Авторы приводят, как аксиому, то, что отрезок есть „кратчайший путь“ между его концами, и в иллюстрирующем этот раздел контрольном вопросе (стр. 41) они предлагают: „Найти на карте расстояние между Москвой и столицами союзных республик, измеренное по воздушным линиям, и сравнить это расстояние с длиной железнодорожных линий между ними“. Помилуйте, кратчайший путь от Москвы до Тбилиси, Самарканда и др. лежит не по прямой (которая проходит внутри земного шара), а по дуге большого круга!

Я думаю, что из приведенного можно вывести следующее заключение: основные понятия и логическая структура курса геометрии или скомканы, или преподнесены в безграмотном, нелепом виде.

На этом фоне комично выглядит столь рафинированная вещь, как аксиоматика Гильберта. Конечно, легче переписать из какого-нибудь источника аксиоматику Гильберта, чем толково изложить более простые, элементарные логические и методологические вопросы построения курса. В общем, получается картина, напоминающая голого дикаря в цилиндре.

Перейдем к тому, как излагаются отдельные вопросы курса. Здесь мы видим, что как раз в принципиальных местах курса, трудных для учителя, при прохождении которых он, прежде всего, обратился бы за помощью к методическому пособию, он не найдет в книге ничего полезного.

Отношениям несоизмеримых отрезков уделено полстраницы (стр. 152). При этом напутано: хотя и утверждается, что „отношение несоизмеримых отрезков есть бесконечная непериодическая дробь“, но из текста (равно, как и из текста стабильного учебника) отнюдь не следует, что эта дробь непериодическая.

Теория пределов и бесконечно малых списана с устарелых учебников анализа. Притом используется та неточная терминология, которой для упрощения иногда пользуются в учебниках анализа и которая совершенно не нужна в элементарной геометрии, где имеют место предельные переходы не непрерывных величин, а последовательностей. При этом авторы не могли удержаться от безграмотной и нелепой задачи: „Следует рассмотреть пример: Определить, чему равен каждый из внутренних углов правильного n -угольника, если число сторон многоугольника бесконечно возрастает“ (стр. 280, подчеркнуто авторами).

Площади круга уделяется одна страница; длине окружности — несколько больше, но при этом допускается методическая нелепость: теория длины окружности у авторов почему-то опирается на несравненно более сложную теорию длин произвольных кривых (выходящую за пределы элементарной геометрии), именно на то, что „объемлющая линия всегда больше выпуклой объемлемой“, — факт, нигде авторами не доказанный.

Нагромодив свыше 300 страниц всевозможного материала, авторы не смогли помочь учителю в трудных местах курса и лишь внесли в них путаницу. Но тогда — к чему все методическое пособие?

Мы уже приводили примеры нечетких или просто нелепых формулировок; ими усеяна вся книга. Чрезвычайно комичны „высокоученые“, но неграмотно звучащие фразы, вроде „Все абстрактные геометрии суть обобщения геометрии Эвклида, где (? — Л. Л.) последняя является особым случаем в закономерностях обобщенных пространств“ (стр. 6).

Авторы с невероятным упрямством повторяют многократно одну и ту же нелепо сформулированную задачу: „Определим число прямых, проходящих через n точек“ (? — Л. Л.), или иначе: „Определить наибольшее число прямых, определяемых n точками“ (? — Л. Л.) (см. стр. 44, 45, 46, 54, 55, 56 и т. д.). Они даже опасаются, что получат неверный ответ на свой вопрос, как будто на столь бессмысленно поставленный вопрос можно получить „верный“ ответ (см. разглагоствования на стр. 44—45).

Не умея грамотно формулировать даже простую задачу или определение — то, что должен уметь делать всякий школьник старшего класса, — авторы имеют наглую претензию стать законодателями математической терминологии. Они сочиняют новые никому не нужные термины („смешанная кривая“). Они заменяют общепринятые термины другими — вместо „вертикальных углов“ вводят „противоположные углы“ (хотя и в математике, и в обычной жизни эти термины имеют совершенно другой смысл). Они предлагают ликвидиро-

вать термины „опустить перпендикуляр“ и „восставить перпендикуляр“, заменяя их одним термином „построить перпендикуляр“ (хотя при этом смешиваются две различные задачи) и т. д. Допустимо ли, чтобы каждый автор (даже не столь малограмотный, как авторы настоящей книги) устанавливал свою собственную математическую терминологию?

Перед нами совершенно беспардонная халтура. Она может принести учителю только вред, так как в ней содержится много нелепостей и безграмотных мест. Мы полагаем, что книгу следует немедленно изъять из продажи.

Заметим в заключение, что авторы являются монопольными авторами всей педагогической литературы по геометрии. Они — авторы и препедевтического курса и систематического курса. Их халтурная деятельность по составлению учебников достаточно широко известна и заклеяна всеми авторитетными математическими учреждениями Союза.

Л. Лютин.

Nathan Altshiller-Court, Dr. Sc., Professor of Mathematics University of Oklahoma. Modern Pure Solid Geometry. New-York, 1935.

На французском языке имеется ряд книг по геометрии, в которых элементарными методами излагаются основные положения новой синтетической геометрии и геометрии треугольника¹⁾. Основным недостатком всех этих книг надо признать стремление их авторов ограничиться только планиметрическим материалом. Лишь отдельные авторы (напр. Guichard) дают некоторый материал, относящийся к геометрии тетраэдра. Книга американского профессора Альтшиллера-Корта восполняет этот пробел. Автор является квалифицированным геометром и опытным педагогом. Популяризация идей новой геометрии является очень важным делом. Новая геометрия способна заинтересовать начинающего математика и дать ему посильный материал для самостоятельных исследований.

Рецензируемая книга содержит весьма обширный материал. Первая, вводная глава знакомит читателя с основными положениями и задачами. Автор достаточно подробно излагает свойства гиперболических четверок прямых, много внимания уделяется гомотетичным фигурам и перспективным тетраэдрам. Во второй и третьей главах мы находим подробное систематическое изложение различных свойств трехгранных углов и тетраэдров.

Среди различных теорем, доказываемых в этих главах, мы найдем много интересных, которые являются обобщениями аналогичных теорем геометрии треугольника. Вся пятая глава целиком посвящена пространственной теории трансверсалий. Обращает на себя внимание седьмая глава, в которой читатель найдет систематическое изложение геометрии сети сфер. Наибольший интерес для читателя представляет содержание последней главы. Здесь мы имеем оригинальное изложение геометрии тетраэдра. Автор очень удачно расположил материал. Читатель, знакомый с основными положениями геометрии треугольника, с большим интересом будет следить за ходом рассуждений автора, систематически доказывающего ряд стереометрических аналогов, относящихся к геометрии тетраэдра. В этой главе мы найдем элементарное изложение всех свойств ортоцентральных тетраэдров, точек и плоскостей Лемуана и сфер Нейберга. Большим достоинством книги американского ученого является наличие большого числа тщательно подобранных упражнений. самостоятельное решение которых позволяет читателю глубже понять идеи новой синтетической геометрии.

Книга издана очень изящно. Недостатком ее надо признать излишнюю лаконичность автора и отсутствие в некоторых случаях чертежей, что несколько затрудняет чтение. Отсутствие в нашей учебной литературе подобных пособий ставит в порядок дня издание пополненного и тщательно отредактированного перевода рецензируемой книги.

М. Черняев (Ростов-на-Дону).

¹⁾ С. Guichard, *Traité de Géométrie*, т. 2; I. Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, т. 2; Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie*, т. 2.

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
М. Л. Шевелев. Деление многочлена на многочлен	3
Т. А. Делибаш. Определение некоторых расстояний в треугольнике	6
Д. И. Перепелкин. Об одном построении правильного икосаэдра и правильного додекаэдра	10
Н. А. Никулин. О геометрических построениях некоторых алгебраи- ческих кривых третьего порядка	15
В. Л. Теуш. Исследование общего уравнения кривой второго порядка в векторной форме	19
И. И. Забелло. Приближенное вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений	23
М. Л. Шевелев. О методе Э. Уиттекера для вычисления корней алгебраического уравнения	35
Задачи	47
Задачи для школьников	48
Решения задач	48
Письма читателей	51
Текущая жизнь	54
Обзор печати	55
Библиография	59

УЧЕБНИКИ К 1937/38 УЧЕБНОМУ ГОДУ

МАТЕМАТИКА

- Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия. Концентр I, выпуск I
(Для втузов.)
- Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия. Концентры II и III.
(Для университетов.)
- Грэнвиль В. и Лузин Н. Н., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. I. (Для втузов.)
- Грэнвиль В. и Лузин Н. Н., Курс дифференциального и интегрального исчисления, ч. II. (Для втузов.)
- Дубнов Я. С., Сборник задач по дифференциальному исчислению.
(Для втузов.)
- Окунев Л. Я., Высшая алгебра. (Для университетов.)
- Поссе В. К. и Привалов И. И., Курс дифференциального исчисления. (Для втузов.)
- Привалов И. И., Аналитическая геометрия. (Для втузов.)
- Привалов И. И., Интегральные уравнения. (Для университетов.)
- Рудаев А. К., Задачник по начертательной геометрии. (Для втузов.)
- Степанов В. В., Дифференциальные уравнения. (Для университетов.)
- Сушкевич А. К., Высшая алгебра. (Для университетов.)
- Тарасов Н. П., Курс высшей математики для техникумов. (Для техникумов.)

МЕХАНИКА

- Бухгольц Н. Н., Основы теоретической механики, ч. II. (Для университетов.)
- Веселовский И. Н. и Тимаков А. Е., Основы механики в элементарном изложении. (Для курсов мастеров и самообразования.)
- Иванов Н. И., Курс сопротивления материалов. (Для втузов.)
- Левинсон Л. Е., Техническая механика, ч. I. (Для техникумов.)
- Левинсон Л. Е., Техническая механика, ч. II. (Для техникумов.)
- Левинсон Л. Е., Техническая механика, ч. III. (Для техникумов.)
- Феппль, Техническая механика. (Для университетов.)

ФИЗИКА

- Гримзель, Курс физики, т. II, ч. I. (Электричество и магнетизм.)
(Для вузов.)
- Капцов Н. Я., Физические явления в вакууме. (Для втузов.)
- Модестов А. Я., Физика, ч. I. (Для техникумов.)
- Модестов А. Я., Физика, ч. II. (Для техникумов.)
- Модестов А. Я., Физика, ч. III. (Для техникумов.)
- Соколов, Физический практикум. (Для университетов.)
- Шефер, Теоретическая физика, т. III, ч. I. (Для университетов.)

СПРАВОЧНИКИ

- Березовский Б. Я., Веселовский И. Н., Модестов А. Я., Справочник по элементарной математике, механике и физике.
- Ванков С. Н., Карманный технический справочник.
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ, В. 12

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По вине
60	30 сверху	последовательной	последовательностей	Редактора